

Stochastische Prozesse II

1.2 Stochastische Netzwerke: Reversibilität (= Zeitumkehrbarkeit)

Anschaulich: Film läuft rückwärts - der Prozess bleibt der gleiche.

Definition: (X_t) reversibel $\Leftrightarrow \mathcal{L}(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) = \mathcal{L}(X_{\tau-t_1}, \dots, X_{\tau-t_n})$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

Lemma 1.1: reversibel $\Rightarrow$ stationär

Beweis: Zwei (Zeit-) Spiegelungen ergeben eine Translation.

Theorem 1.2: Sei (X_t) stat. MK: (X_t) ist reversibel $\Leftrightarrow \exists \pi_j > 0, \sum \pi_j = 1, \pi_j p_{jk} = \pi_k p_{kj} \quad i, j \in \mathcal{S} \quad (1.5)$
 $\Rightarrow \pi_j = \sum_k \pi_k p_{kj}$

Beweis: $\Rightarrow$ Sei $\pi_j = P(X_t = j), \pi_j p_{jk} = P(X_t = j, X_{t+1} = k) \stackrel{\text{rev.}}{=} P(X_t = k, X_{t+1} = j) = \pi_k p_{kj}$

$\Leftarrow$ π_j ist stat. Vekt. $(\sum_k)$ $\Rightarrow P(X_t = j_0, \dots, X_{t+m} = j_m) = \pi_{j_0} p_{j_0 j_1} \dots p_{j_{m-1} j_m} = \pi_{j_m} p_{j_m j_{m-1}} \dots p_{j_1 j_0} = P(X_t = j_m, \dots, X_{t+m} = j_0)$. Sei $\tau = t + t' + m \dots$

Theorem 1.3: Sei (X_t) stat. MP: (X_t) reversibel $\Leftrightarrow \exists \pi_j > 0, \sum \pi_j = 1, \pi_j q_{jk} = \pi_k q_{kj} \quad j, k \in \mathcal{S} \quad (1.6)$
 $\Rightarrow \pi_j q_j = \sum_k \pi_k q_{kj}$ (Gleichgew. bed.)

Beweis: $\Rightarrow$ Sei $\pi_j = P(X_t = j), \pi_j q_{jk} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} P(X_t = j, X_{t+\tau} = k) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} P(X_t = k, X_{t+\tau} = j) = \pi_k q_{kj}$

$\Leftarrow$ Mit Hilfssatz: (X_t) reversibel $\Leftrightarrow P(X_t = i, X_{t+s} = j) = P(X_t = j, X_{t+s} = i) \quad \forall t, s, i, j$ (*)
 [Beweis mit $(\sum_j) P(X_t = i) = P(X_t = i)$ und Markov-Eigenschaft, vgl. Bew. Th. 1.2.]

Sei M = Anzahl Sprünge in $[t, t+s]$ + 1 (o.E. kein Sprung z. Zt. $t+s$)

Seien $Z_1, \dots, Z_M$ die Zustände in $[t, t+s]$, $T_1, \dots, T_M$ die Verweilzeiten. $\rightarrow P(T_m > h_m)$

$\Rightarrow P(X_t = i, X_{t+s} = j) = P(X_t = i) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j_2, \dots, j_{m-1}} \frac{q_{ij_2} \dots q_{j_{m-1}j}}{q_i} \int \dots \int_{h_1, \dots, h_{m-1}} q_i e^{-q_i h_1} \dots e^{-q_j h_{m-1}} dh_1 \dots dh_{m-1}$
 $h_m := s - \sum_{k=1}^{m-1} h_k$

ebenso $P(X_t = i, X_{t+s} = j) = \dots$

Die $q_i, q_{ij_2}, \dots$ bzw. $q_j, q_{j_{m-1}j}, \dots$ heben sich weg.

Wegen $P(X_t = i) = \pi_i$ (wie bei Th. 1.2) und $\pi_j q_{jk} = \pi_k q_{kj}$ sind die $\pm$ S. gleich

bis auf $\int \dots \int_{h_1, \dots, h_{m-1}} \dots$ bzw. $\int \dots \int_{h_m, \dots, h_2} \dots$. Mit Substitution $h_m = s - \sum_{k=2}^m h_k - h_1$ folgt d. Rest.

Bemerkung: $\pi_j q_{jk}$ entspricht W-Fluss von j nach k .

Der Graph G des MP. (X_t) ist zus. hängend: (X_t) irreduzibel.

Ein "Schnitt" ist eine Zerlegung $\mathcal{S} = \mathcal{A} + (\mathcal{S}, \mathcal{A})$

Lemma 1.4: (X_t) stationärer MP. (nicht notw. reversibel!) $\Rightarrow$ Fluss über d. Schnitt ist balanciert

d.h. $\sum_{j \in \mathcal{A}} \sum_{k \in \mathcal{S}, \mathcal{A}} \pi_j q_{jk} = \sum_{j \in \mathcal{A}} \sum_{k \in \mathcal{S}, \mathcal{A}} \pi_k q_{kj}$

Beweis: $\sum_{\mathcal{A}} \sum_{\mathcal{S}} = \sum_{\mathcal{A}} \sum_{\mathcal{S}} \quad \text{und} \quad \sum_{\mathcal{A}} \sum_{\mathcal{A}} = \sum_{\mathcal{A}} \sum_{\mathcal{A}}$

Lemma 1.5: (X_t) stat. MP. Graph G ist ein Baum $\Rightarrow (X_t)$ ist reversibel.

Beweis: Mit L. 1.4 und Schnitt durch Kante (j, k) .