

Stochastische Prozesse II

1 Stochastische Netzwerke *

1.1 Markov-Ketten: Bezeichnungen und Eigenschaften

$(X_t, t \in T)$ sei ein stochastischer Prozess mit Zustandsraum $\mathcal{S}$, $T = \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{R}$

(X_t) ist stationär: $\Leftrightarrow P(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = P(X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau}) \quad \forall n, \forall t_i, t_i+\tau \in T$

(X_t) ist ein Markov-Prozess: $\Leftrightarrow P(X_{t_{n+1}} = j_{n+1} | X_{t_n} = j_n, \dots, X_{t_1} = j_1) = P(X_{t_{n+1}} = j_{n+1} | X_{t_n} = j_n)$
für $t_1 < \dots < t_{n+1}$ und $P(\text{---}) > 0$.

Lemma 1: (X_t) ist e. Markov-Prozess $\Leftrightarrow$ unter der Bedingung $\{X_{t_p} = j_p\}, t_1 < \dots < t_p < \dots < t_n$,
sind $(X_{t_1}, \dots, X_{t_{p-1}})$ und $(X_{t_{p+1}}, \dots, X_{t_n})$ stoch. unabhängig.

"MK" $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ sei (zeitl.) homogen $\Leftrightarrow P(X_{t+1} = k | X_t = j) = p_{jk}$ unabh. von t , Übergangs-W.

(X_t) sei irreduzibel, i.d. Regel auch aperiodisch.

stationäre Verteilung $(\pi_j, j \in \mathcal{S})$: $\Leftrightarrow \pi_j = \sum_{k \in \mathcal{S}} \pi_k p_{kj}, j \in \mathcal{S}$ (1.1) und $\sum \pi_j = 1$ ($\pi_j \geq 0$)

Lemma 2: (π_j) Lösung v. (1.1): $\sum \pi_j = \infty \Rightarrow \nexists$ stat. Vert. $\Rightarrow P(X_t = k) \rightarrow 0$ f. $t \rightarrow \infty, \forall k$

$\sum \pi_j < \infty \Rightarrow \exists$ stat. Vert. $\Rightarrow P(X_t = k | X_0 = j) \rightarrow \pi_k \quad \forall j, k$

τ_k ist die (langfristige) durchschnittl. Aufenthaltszeit in k .

"MP" Markov-Prozess = HMKS, Übergangs-W. $p_{jk}(t) := P(X_{s+t} = k | X_s = j)$,

Annahmen: irreduzibel, "stabil" ($q_j < \infty$), keine Kämpfung v. Sprungstellen $\Rightarrow$ konservativ

$\rightarrow$ Def.: Übergangsraten $q_{jk} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P(X_{t+h} = k | X_t = j), j \neq k. \quad \boxed{q_{jj} := 0}, q_j := \sum_{k \in \mathcal{S}} q_{jk}!$

stationäre Verteilung $(\pi_j, j \in \mathcal{S})$ $\Leftrightarrow \boxed{\pi_j q_j = \sum_k \pi_k q_{kj}, j \in \mathcal{S}} \quad \text{(1.3)}$ und $\sum \pi_j = 1$

Lemma 3: (π_j) Lösung v. (1.3): $\sum \pi_j = \infty \Rightarrow \nexists$ stat. Vert. $\Rightarrow P(X_t = k) \rightarrow 0$ f. $t \rightarrow \infty \quad \forall k$

$\sum \pi_j < \infty \Rightarrow \exists$ stat. Vert. $\Rightarrow P(X_t = k | X_0 = j) \rightarrow \pi_k \quad \forall j, k$

Aus $P(X_0 = j) = \pi_j$ ($\forall j$) folgt dann $P(X_t = j) = \pi_j \quad \forall j$ ($\pi_j = \sum_k \pi_k p_{kj}(t)$)

Lemma 4: Die Verweildauer in j ist $\text{Exp}(q_j)$ -verteilt.

Die eingebettete Markov-Kette (der Sprungprozess) $(X_n^j, n \in \mathbb{Z}), X_0^j = 0$,

besitzt die Übergangs-W. $r_{jk} = q_{jk}/q_j \quad \forall j, k$. (j steht für "jump")

Bemerkung: Die stat. Verteilung der "Sprung-Kette" ist i. Allg. verschieden

von der stat. Verteilung des Markov-Prozesses (der HMKS),

d.h. aus " (X_t) stationär" folgt nicht " (X_n^j) stationär".

* Literatur: F. Kelly: Reversibility and Stochastic Networks