

Stochastische Prozesse II

2.1 Stochastische Kontrolltheorie: Fuzzy Steuerung (fuzzy = unscharf)

Vorbemerkung: Bei Stoch. Kontrolltheorie (und deterministischer) ist der Modellier- und Rechenaufwand ziemlich groß, auch bei wenigen Variablen.

Alternative: Unscharfe Mess- und Steuerverte, aber mehr Messwerte, und: Standardisierung der Verfahren, d.h. einfache, leicht programmierbare Mikrochips.

Anwendungsbereiche: Auto, Waschmaschine, Prozess-Steuerung (technisch).

Name: „Fuzzy Steuerung“. Literatur: Terano, Asai, Sugeno: Fuzzy Systems Theory.

Hier: Fuzzy-Modelle allgemein und speziell Fuzzy-Steuerung

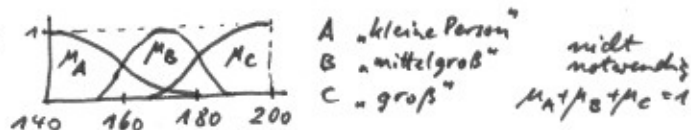
Fuzzy-Mengen und Fuzzy-Zahlen:

Gegeben sei eine Grundmenge, meist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$, i. allg. X (gelte allg. $X \times Y$ aä.).

Eine gewöhnliche Menge A in X kann durch die Indikatorfkt. $1_A: X \rightarrow \{0,1\}$ angegeben werden.

Eine Fuzzy-Menge A wird durch den Zugehörigkeitsgrad $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ angegeben.

Beispiel: kleine/große Person:
 $X = [140, 200]$



Die α -Schnitte $A_\alpha := \{x \in X: \mu_A(x) \geq \alpha\}$ sind gewöhnliche (scharfe) Mengen.

Fuzzy-Zahlen: $X = \mathbb{R}$, A ist „normal“ ($\Leftrightarrow \max \mu_A = 1$), α -Schnitte konvex u. abgekl.

Verknüpfungen: i. res. analog zu „scharfen“ Mengen: Seien A, B Fuzzy-Mengen in X .

$A \cap B$: $1_{A \cap B} = \min(1_A, 1_B)$ (scharf) $\mu_{A \cap B} = \min(\mu_A, \mu_B) =: \mu_A \wedge \mu_B$ (unscharf)

$A \cup B$: $1_{A \cup B} = \max(1_A, 1_B)$ $\mu_{A \cup B} = \max(\mu_A, \mu_B) =: \mu_A \vee \mu_B$

A^c : $1_{A^c} = 1 - 1_A \Rightarrow \mu_{A^c} = 1 - \mu_A$, $A = B \Leftrightarrow \mu_A = \mu_B$, $A \subset B \Leftrightarrow \mu_A \leq \mu_B$

Rechenregeln $A^{cc} = A$, de Morgan $\checkmark$, aber: $A \cup A^c \neq X$, $A \cap A^c \neq \emptyset$ (i. allg.)!

Andere Operationen: aus $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$: $\mu_{A \cdot B} = \mu_A \cdot \mu_B$

aus $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$: $\mu_{A \oplus B} = \mu_A + \mu_B - \mu_A \cdot \mu_B$, $1_{A \cup B} = (1_A + 1_B) \wedge 1 \Rightarrow \mu_{A \oplus B} = \dots$

Fortsetzungsprinzip für gew. Fkt. $f: X \rightarrow Y$: $\mu_{f(A)}(y) = \sup \{ \mu_A(x) : f(x) = y \}$

(Ein „Bildpunkt“ erhält das Max./Supr. der mögl. Zugehörigkeitswerte.)

z.B. $g: X \times Y \rightarrow Z \Rightarrow g(A, B)$ durch $\mu_{g(A, B)}(z) = \sup \{ \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) : z = g(x, y) \}$

dazu $A \times B$ durch $\mu_{A \times B}(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)$. [vgl. $1_{A \times B} = \min(1_A, 1_B)$ (aber auch $= 1_A \cdot 1_B$!)]

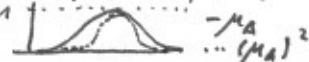
Fuzzy-Aussagen: „ x ist A “ hat den „Wahrheitsgrad“ $\mu_A(x)$. (linguistische Variable)

Zusammengesetzte Fuzzy-Aussagen: „ x ist A oder x ist B “ $:=$ „ x ist $A \cup B$ “,

„ x ist C “ $\rightarrow$ „ y ist D “ $=$ „ (x, y) ist $C \rightarrow D$ “: o. u. bei „Relationen“.

Modifizierte Fuzzy-Aussagen: „ x ist sehr A “ $\Leftrightarrow \mu_{\text{sehr } A}(x) = (\mu_A(x))^2$

„ x ist $\approx A$ “: $\mu_{\approx A}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$, „ x ist nicht A “: $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$



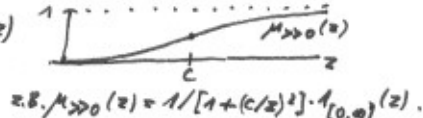
Stochastische Prozesse II

2.2 Stochastische Kontrolltheorie: Fuzzy Steuerung

Fuzzy-Relationen: R in $X \times Y$ = Fuzzy-Menge in $X \times Y \Leftrightarrow \mu_R(x, y)$

z.B., Y ist viel größer als X ($y \gg x$) mit $z \gg 0 \Leftrightarrow \mu_{\gg 0}(z)$

also R^+ mit $\mu_{\gg}(x, y) = \mu_{\gg 0}(y - x)$



Verknüpfungen von Relationen (beide in $X \times Y$ (!)) wie bei Fuzzy-Mengen,

z.B. R, S Relationen in $X \times Y \Rightarrow R \cup S \Leftrightarrow \mu_{R \cup S}(x, y) = \mu_R(x, y) \vee \mu_S(x, y)$,

entsprechend für $R \cap S, R^c$, auch $R \oplus S, \dots$ neue Umkehrung $R^u \Leftrightarrow \mu_{R^u}(x, y) = \mu_R(y, x)$.

Fuzzy-Mengen als Relationen: A in $X \Rightarrow A \times Y$ in $X \times Y$ mit $\mu_{A \times Y}(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_Y(y) = \mu_A(x)$

z.B. A in X, B in $Y, A \rightarrow B$ als Relation? $A \rightarrow B$ ist „logisch“ $A^c \cup B$, also $A^c \cup B$ oder $A^c \oplus B \dots$

es ergibt sich also die Relation $R = A \rightarrow B$ mit $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = (1 - \mu_A(x)) \vee \mu_B(y)$ oder ...

Komposition von Relationen: (vgl. $R: x \in Y, S: y \in Z \Rightarrow R \circ S: x \in Z$ (y entfällt))

Sei R in $X \times Y, S$ in $Y \times Z$. Setze $R \circ S: \mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_y (\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z))$

auch A in Y, S in $Y \times Z \Rightarrow A \circ S: \mu_{A \circ S}(z) = \sup_y (\mu_A(y) \wedge \mu_S(y, z))$

und R in $X \times Y, B$ in $Y \Rightarrow R \circ B: \mu_{R \circ B}(x) = \sup_y (\mu_R(x, y) \wedge \mu_B(y))$.

Fuzzy Steuerung: Kontroll-Regeln + Schlussweisen

Beispiel von 2 Eingangsgrößen (Beob.) und 1 Steuerungsgröße.

Regel 1 Falls x klein und y groß, dann sei z mittel (besser als Tabelle

Regel 2 Falls x groß und y mittel, dann sei z groß bzw. Matrix)

⋮

Anwendung der Regeln (eine Möglichkeit)

1. Schritt: Den Messwerten E_1, E_2 werden

(Zugeh.) Grade zugewiesen:

z.B. $E_1 = 0.12 \Rightarrow \mu_{0.1}(E_1) = 0.4, \mu_{0.2}(E_1) = 0.6$

$E_2 = 0.41 \Rightarrow \mu_{0.2}(E_2) = 0.3, \mu_{0.5}(E_2) = 0.7$

Beispiel (Ausschnitt)

$E_1 \backslash E_2$	...	Z	SP	MP	LP
SN	...	SN	Z	SP	MP
Z	...	Z	SP	MP	LP
SP	...	SP	MP	LP	...
MP	...	MP	LP	...	...

mit $SN = -0.2, Z = 0, SP = 0.2, MP = 0.5$

2. Schritt: Die Regeln (hier 4) werden angewandt bzw. die Steuergrößen „abgelesen“.

3. Schritt: Den Steuergrößen werden Grade zugewiesen:

z.B. den Regeln mit Min oder mit Produkt

den Steuergrößen (bei mehrfachen Auftreten) mit Summe oder Max

4. Schritt: Die Steuergrößen werden angewandt:

entweder einer der Werte SP, MP, LP (mit max. Grad)

oder - falls technisch Zwischenwerte mögl. sind - als gewichteter Wert.

Ausblick: Bestimmung und Anwendung der Regeln mit neuronalen Netzen:

Neuronale Netze arbeiten hochgradig parallel.

„Bestimmung“ mit (vielen) Testläufen mit „erwünschtem“ Ausgang
- Regeln mit gutem/schlechtem Ausgang werden verstärkt/abgeschwächt

„Anwendung“: sehr schnell durch paralleles Rechnen.