Stochastische Prozesse II

1.4 Stochastische Kontrolltheorie: Lineares Feedback-Problem, 1-dimensional

$dX_t = a_1(t)\cdot X_t\,dt + a_2(t)\cdot u(t,X_t)\,dt + b(t)\,dW_t\ ,\quad t\in[0,T]$ (Bewegungsgleichung)

Kosten: $L(t,a,u) = c(t)\cdot x^2 + d(t)\cdot u^2$, Endbedingung $\Phi(x) = \varphi_2\cdot x^2 + \varphi_1\cdot x + \varphi_0$

Lösung des linearen Problems:

$$(*)\quad \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \min_u\left[a_1(t)\cdot x\cdot V_x + a_2(t)\cdot u\cdot V_x + \tfrac{1}{2}b^2(t)V_{xx} + c(t)\cdot x^2 + d(t)\cdot u^2\right] = 0$$

1. Suche u^* als Minimum von $a_2(t)u\cdot V_x + d(t)u^2$:

   Ableitung nach u $=0$: $\quad a_2(t)\cdot V_x + 2d(t)u = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{1}{2}\frac{a_2(t)}{d(t)}V_x$

2. Setze in $(*)$ ein:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2(t)V_{xx} + a_1(t)\cdot x\cdot V_x - \frac{1}{2}\frac{a_2(t)^2}{d(t)}\cdot V_x^2 + \frac{1}{4}\frac{a_2(t)^2}{d(t)}V_x^2 + c(t)x^2 = 0$$

   mit Endbedingung $V(T,x) = \varphi_2 x^2 + \varphi_1 x + \varphi_0$.

3. Lösung mit Ansatz $V(t,x) = q_2(t)\cdot x^2 + q_1(t)\cdot x + q_0(t)$, $\Rightarrow \begin{cases} V_x = 2q_2\cdot x + q_1 \\ V_{xx} = 2q_2 \end{cases}$

$$q_2' x^2 + q_1' x + q_0' + b^2\cdot q_2 + a_1 x\cdot 2q_2 x + a_1 x\cdot q_1 - \frac{1}{4}\frac{a_2^2}{d}\left(4q_2^2x^2 + 4q_1q_2x + q_1^2\right) + cx^2 = 0$$

   Koeffizientenvergleich für x^2, x^1, x^0:

   $q_2' + 2a_1q_2 + c - a_2^2q_2^2/d = 0$ mit $q_2(T) = \varphi_2$

   $q_1' + (a_1 - a_2^2q_2/d)\,q_1 = 0$ mit $q_1(T) = \varphi_1$

   $q_0' + b^2q_2 - \frac{1}{4}a_2^2q_1^2/d = 0$ mit $q_0(T) = \varphi_0$

   Diese Gleichungen können für q_2, dann q_1, dann q_0 gelöst werden.

4. Die optimale Steuerung $u^*(t,x)$ ergibt sich mit $V_x = 2q_2(t)\cdot x + q_1(t)$

$$u^*(t,x) = -\frac{1}{2}\frac{a_2(t)}{d(t)}\left(2q_2(t)x + q_1(t)\right)$$

   Ist speziell $\varphi_1 = 0$, dann folgt $q_1 \equiv 0$, also $u^*(t,x) = -\frac{a_2(t)}{d(t)}q_2(t)\cdot x$.

Einfaches Beispiel: $a_1 = c = \varphi_1 = \varphi_0 = 0,\ a_2 = 1$, b,d konstant. $\Rightarrow dX_t = u(t,X_t)dt + b\,dW_t$.
Mit Schritt 3+4 erhält man $u^*(t,x) = -\frac{1}{T-t+d/\varphi_2}\cdot x$. (s. Übg.)

Anwendung auf technische und Finanz-Prozesse: Dort reichen eindimensionale und oft auch lineare Modelle nicht aus,

z.B. Warentermingeschäft mit Absicherung (der Bank) durch Devisenkauf. Ist X_t der Wert des internen Depots und S der vereinb. Warenwert z.Zt. T, dann wäre etwa $L\equiv 0$ und $\Phi(x) = \varphi_2(x-S)^2$ eine sinnvolle Wahl.

Stochastische Prozesse II

1.5 Stochastische Kontrolltheorie: Lineares Feedback-Problem, mehrdimensional

<u>Beispiel:</u> Steuerung der Geschwindigkeit eines U/S-Bahn-Zugs.

Sei $X_t^{(1)}$ der Restweg zum nächsten Halt, $X_t^{(2)}$ die aktuelle Geschwindigkeit, $U_t = u(t, X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$ die Beschleunigung, $L(t, x^{(1)}, x^{(2)}, u) = d \cdot u^2$ die Kostenrate und $\phi(x^{(1)}, x^{(2)}) = \varphi (x^{(1)})^2 + \psi (x^{(2)})^2$ die Strafe bei Abweichung von $X_T^{(1)} = X_T^{(2)} = 0$.

$$\Rightarrow d\begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ X_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ X_t^{(2)} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t, X_t^{(1)}, X_t^{(2)})\, dt + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dW_t^{(1)} \\ dW_t^{(2)} \end{pmatrix} \quad \left[\begin{matrix} W_t^{(1)}, W_t^{(2)} \text{ sind zwei unabh.} \\ \text{Störungsursachen} \end{matrix}\right]$$

<u>Allgemeines Problem:</u> $dX_t = A_1(t) X_t\, dt + A_2(t) U_t\, dt + B(t)\, dW_t$, $t \in [0, T]$

mit Dimension n, $n \times n$, n, $n \times k$, k, $n \times m$, m

dazu $L(t, x, u) = x^T C(t) x + u^T D(t) u$ mit $C(t), D(t)$ symm. u. nicht-neg./positiv-definit

und $\Phi(x) = x^T \Phi_2 x + \varphi_1 \cdot x + \varphi_0$ von entspr. Dimension.

Zur Herleitung der „Bewegungsgleichung für V" benötigt man die <u>mehrdimensionale Itô-Formel (vgl. SK 1.3 B):</u> $[dX_t = a(\ )\,dt + B(\ )\,dW_t]$

Ist dX_t gegeben (n-dim.) und $V(t,x)$ mit stetigen Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial t}$ (eindim.), $\frac{\partial V}{\partial x} = V_x$ (n-dim.), $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_{xx}$ (n×n-dim.), dann gilt [bei V ohne Argumente (t, X_t)]

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + V_x^T dX_t + \frac{1}{2} (dX_t)^T V_{xx} (dX_t), \text{ wobei } E(dW_t^{(i)} \cdot dW_t^{(j)}) = dt \text{ bei } i=j, \text{ sonst } = 0.$$

$$\Rightarrow dV = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + V_x^T a(\quad) + \frac{1}{2}\sum_i [B^T(\quad) V_{xx} B(\quad)]_{ii}\right] dt + V_x^T B(\quad)\, dW_t$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung für V im obigen linearen Problem:

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s,x) + \min_u \left[V_x^T A_1(s) x + V_x^T A_2(s) u + \frac{1}{2}\sum_i [B^T(s) V_{xx} B(s)]_{ii} + x^T C(s) x + u^T D(s) u\right] = 0 \quad (*)$$

<u>Lösung des mehrdimensionalen Problems:</u> (ganz analog zum 1-dim. Fall)

1. Suche u^* als Minimum von $V_x^T A_2(t) u + u^T D(t) u$ $\Leftrightarrow V_x^T A_2(t) + 2u^T D(t) = 0$
   $\Leftrightarrow \underline{u^* = -\frac{1}{2} D^{-1}(t) A_2^T(t) V_x}$
2. Setze in (*) ein mit Endbed. $V(T,x) = x^T \Phi_2 x + \varphi_1 x + \varphi_0$.
3. Lösung mit Ansatz $V(t,x) = x^T Q(t) x + q_1^T(t) x + q_0$, $V_x^T(t,x) = 2x^T Q(t) + q_1^T(t)$, $V_{xx} = 2Q(t)$,
   $\Rightarrow Q'(t) + A_1^T(t) Q(t) + Q(t) A_1(t) + C(t) - Q(t) A_2(t) D^{-1}(t) A_2^T(t) Q(t) = 0$ mit $Q(T) = \Phi_2$,
   $q_1'(t) + \left(A_1^T(t) - Q(t) A_2(t) D^{-1}(t) A_2^T(t)\right) q_1(t) = 0$ mit $q_1(T) = \varphi_1$,
   $q_0'(t) + \sum_i [B^T(t) Q(t) B(t)]_{ii} - \frac{1}{4} q_1^T(t) A_2(t) D^{-1}(t) A_2^T(t) q_1(t) = 0$ mit $q_0(t) = \varphi_0$.
4. $u^*(t,x) = -\frac{1}{2} D^{-1}(t) A_2^T(t) (2Q(t) x + q_1^T(t))$ (bei $\varphi_1 = 0$ entfällt $q_1(t)$)

<u>Bemerkung:</u> Auch die Lösung des allgemeinen nicht-linearen Problems von SK 1.1 verläuft in den gleichen Schritten.