Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse II

1.3 Stochastische Kontrolltheorie: Feedback-Steuerung. Lösungsweg

A. Vergleich: diskrete Zeit – stetige Zeit

„Bewegungsgleichung" für X_n bzw. X_t:

$p^{\hat{u}}(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = p_{ij}(\hat{u}(i,n))$ | $dX_t = a(X_t,U_t,t)\,dt + b(X_t,U_t,t)\,dW_t$

Zielfunktion I:

$I(m,x,\hat{u}) = E_{\hat{u}}\left[\sum_{0}^{N-1} c_n(x,a_n) + \phi(X_N) \mid X_m = x\right]$ | $I(s,x,\hat{u}) = E_{\hat{u}}\left[\int_s^T L(X_t,U_t,t)\,dt + \phi(X_T) \mid X_s = x\right]$

optimale Wertfunktion V:

$V_m(x) := \min_{\hat{u}} I(m,x,\hat{u})$ | $V(s,x) = \min_{\hat{u}} I(s,x,\hat{u})$

Bewegungsgleichung für V

$V_m(x) = \min_u \left[c_m(x,u) + \sum p_{ij}(u) V_{m+1}(j)\right]$ | $V(s,x) = \min_u \left[L(s,x,u) + V(s,x) + E_{\hat{u}}\left(dV(t,X_t)\big|_{(s,x)}\right)\right]$

$\Leftrightarrow \min_u \left[E_{\hat{u}}\left(dV(t,X_t)\big|_{(s,x)}\right) + L(s,x,u)\right] = 0$

mit Endbedingung

$V_N(x) = \phi(x)$ | $V(T,x) = \phi(x)$.

B. Exkurs: Itô-Formel (hier eindimensional)

Ist dX_t gegeben und $V(t,x)$ mit stetigen Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, dann gilt:

$$dV(t,X_t) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,X_t)\cdot dt + \frac{\partial V}{\partial x}(t,X_t)\cdot dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,X_t)\text{„}\cdot(dX_t)^2\text{"} \quad \text{(symbolisch).}$$

Wg. $dX_t = a(\quad)\,dt + b(\quad)\,dW_t$ und „$(dt)^2 \approx 0$, $dt\cdot dW_t \approx 0$, $(dW_t)^2 \approx dt$ (!)" folgt:

$$\underline{dV(t,X_t)} = \left[\frac{\partial V}{\partial t}(t,X_t) + a(\quad)\frac{\partial V}{\partial x}(t,X_t) + \frac{1}{2}b^2(\quad)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,X_t)\right]\underline{dt} + b(\quad)\frac{\partial V}{\partial x}(t,X_t)\,\underline{dW_t}$$

<u>Bemerkung:</u> Bei $E(dV(t,X_t))$ entfällt der letzte Term, da „$E\,dW_t = 0$".

Damit lautet die Bewegungsgleichung für V an der Stelle (s,x):

$$\frac{\partial V}{\partial t}(s,x) + \min_u \left[a(s,x,u)\frac{\partial V}{\partial x}(s,x) + \frac{1}{2}b^2(s,x,u)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(s,x) + L(s,x,u)\right] = 0 \quad (*)$$

C. Lösungsweg (nicht rekursiv, vgl. diskrete Zeit)

1. Suche minimierendes u^*, abhängig von $\left(s,x,\frac{\partial V}{\partial x}(s,x),\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(s,x)\right)$
2. Setze in $(*)$ ein: $u = u^*(V_x,V_{xx})(s,x)$ mit $V_x := \frac{\partial V}{\partial x}$, $V_{xx} := \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$
   genauer: $u^*(s,x,V_x(s,x),V_{xx}(s,x))$
3. Löse die (nicht-stoch.) Dgl.

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + a(t,x,u^*(V_x,V_{xx}))V_x + \frac{1}{2}b(t,x,u^*(V_x,V_{xx}))\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x) + L(t,x,u^*(V_x,V_{xx})) = 0$$

mit Endbedingung $V(T,x) = \phi(x) \Rightarrow$ <u>opt. Wertfkt.</u> $(V(t,x),\ 0 \le t \le T,\ x \in \mathbb{R})$

4. Setze V_x, V_{xx} in u^* ein. $\Rightarrow$ opt. Steuerung $\left(\hat{u}^*(t,x),\ 0 \le t \le T,\ x \in \mathbb{R}\right)$.

D. Lineares Feedback-Problem (hier eindimensional)

Sei $dX_t = a_1(t)\cdot X_t\,dt + a_2(t)\cdot u(t,X_t)\,dt + b(t)\,dW_t$, $t \in [0,T]$,

$L(t,x,u) = c(t)\cdot x^2 + d(t)\cdot u^2$, $\phi(x) = \varphi_2\cdot x^2 + \varphi_1\cdot x + \varphi_0$