Stochastische Prozesse II

1.2 Stochastische Kontrolltheorie: Feedback-Steuerung

Vorstufe: Stochastische Dynamische Optimierung in diskreter Zeit

Speziell: Zustandsraum $\mathcal{S}$ endlich, Zeitraum $[0,\dots,N]$ (Horizont N).

Sei $(X_n, 0 \le n \le N)$ ein stoch. Prozess mit endl. Zustandsraum $\mathcal{S}$, der Zustandsprozess,

sei $(U_n, 0 \le n \le N-1)$ ein Steuerungsprozess mit endl. Wertemenge $\mathcal{D}$,

speziell mit $U_n = \hat{u}(X_n, n)$, $\hat{u} = (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{N-1})$.

Allgemeiner wäre z.B. $\hat{u}(X_0, X_1, \dots, X_n)$ oder randomisiert.

Für geg. $\hat{u}$ sei (X_n) eine Markov-Kette, i.Allg. inhomogen,

mit $P^{\hat{u}}(X_{n+1}=j \mid X_n = i) = p_{ij}(\hat{u}(i,n))$ – also geg. $p_{ij}(u)$, $i,j \in \mathcal{S}$, $u \in \mathcal{D}$.

Zielfunktion $I(x_0, \hat{u}) = E_{\hat{u}}\left[\sum_{n=0}^{N-1} c(X_n, \tilde{u}_n(X_n), n) + \phi(X_N) \mid X_0 = x_0\right]$

ab Zeitpkt m: (mit $\hat{u}_m = (\tilde{u}_m, \dots, \tilde{u}_{N-1})$)

$$I(m, x_m, \hat{u}_m) = E_{\hat{u}}\left[\sum_{n=m}^{N-1} c(\qquad) + \phi(\quad) \mid X_m = x_m\right]$$

Optimalwert $V(m, x_m) := \min_{\hat{u}} I(m, x_m, \hat{u})$, $0 \le m \le N-1$

Satz: $V(0, x_0)$ und eine optimale Steuerung / Politik erhält man rekursiv mit $V(N, x_N) = \Phi(x_N)$ und für $m = N-1, N-2, \dots, 0$

$$V(m, x_m) = \min_u \left[c(x_m, u, m) + \sum_{x_{m+1}} p_{x_m x_{m+1}}(u)\, V(m+1, x_{m+1})\right] \quad (OG),$$

wobei $\hat{u}^*$ optimal ist, wenn $\forall m, x_m$ $u = \tilde{u}_m(x_m)$ die r.S.↑ minimiert.

Beweis: $V(N, x_N) = I(N, x_N, \hat{u})$ für alle $\hat{u}$.

$$\begin{aligned}
V(m,i) &= \min_u \min_{\hat{u}_{m+1}} \left[c(i,u,m) + \sum_j p_{ij}(u)\, I(m+1, j, \hat{u}_{m+1})\right] \\
&= \min_u \left[c(i,u,m) + \min_{\hat{u}_{m+1}} \sum p_{ij}(u) \;\cdots\; \right] \\
&\ge \cdots\cdots\cdots \sum p_{ij}(u) \min_{\hat{u}_{m+1}} I(m+1, j, \hat{u}_{m+1})\Big] \\
&= \min_u \left[c(i,u,m) + \sum p_{ij}(u)\, V(m+1, j)\right] \\
&\overset{\text{n.V.}}{=} \left[c(i, \hat{u}^*_m(i), m) + \sum p_{ij}(\hat{u}^*_m(i))\, V(m+1, j)\right] \\
&\overset{\text{nach Ind.}}{=} \left[\cdots\cdots\cdots\cdots\; I(m+1, j, \hat{u}^*_{m+1})\right] \\
&= I(m, i, \hat{u}^*_m) \ge V(m, i)
\end{aligned}$$

⇒ überall Gleichheit.

Bemerkung: Die Gleichung (OG) entspricht im stetigen Fall: „Differential $=0$", wofür noch ein minimierendes u gefunden werden muss.