Stochastische Prozesse II

1.1 Stochastische Kontroll-Theorie: Feedback-Steuerung

Die Stochastische Kontroll-Theorie basiert auf **Stochastischen Differentialgleichungen**, und diese auf dem **Itô-Integral** $B(t) = \int_0^t b(s)\,dW_s$, wobei (W_s) ein Brownscher Prozess ist und $(b(s))$ ein stochastischer Prozess mit $\int_0^t |\,b(s)|^2\,ds < \infty$, der bzgl. (W_s) nicht vorgreifend ist.

Ein **Stochastisches Differential** $dX_t = a(t)\,dt + b(t)\,dW_t$ (1.1)
ist – mit gegebenem X_0 – die Kurzschreibweise für

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t b(s)\,dW_s,\ \ t\in[0,T]. \qquad (1.2)$$

[Dabei ist $(a(s))$ ein bzgl. (W_s) nicht vorgreifender stoch. Prozess mit $\int_0^t |\,a(s)|\,ds < \infty$.]

Eine **Stochastische Differentialgleichung**

$$dX_t = a(X_t,t)\,dt + b(X_t,t)\,dW_t \ \ (X_0 \text{ gegeben}) \qquad (1.3)$$

ist die Aufgabe, einen Prozess (X_t) (mit gewissen Eigenschaften) zu finden, der (1.3) erfüllt. Man beachte, dass (1.3) auch auf der rechten Seite vom Prozess (X_t) abhängt.

Die Prozesse X_t und W_t können **auch mehrdimensional** sein, z.B. $X_t \in I\!R^n$, $W_t \in I\!R^m$. Dann ist $a(\ )$ ein n-Vektor und $b(\ )$ eine $n\times m$-Matrix aus entsprechenden Funktionen.

Ein **Steuerungs-Problem** benötigt zusätzlich noch einen Steuerungsprozess (U_t).

Bei einem **Feedback-Steuerungs-Problem** ist $U_t = \hat u(X_t,t)$ für geeignete Fkt. $\hat u(x,t)$.

Ein **Feedback-Steuerungs-Problem** besteht aus
– einer Bewegungsgleichung $dX_t = a(X_t,\hat u(X_t,t),t)\,dt + b(X_t,\hat u(X_t,t),t)\,dW_t$ (1.4)
– mit Anfangszustand X_0,
– einer Kostenrate $L(x,u,t)$, Endkosten $\Phi(x_T)$ und damit
– einer Zielfunktion $I(x_0,\hat u) := E\left[\int_0^T L(X_t,\hat u(X_t,t),t)\,dt + \Phi(X_T) |\, X_0{=}x_0\right]$ (1.5)

Gesucht ist eine Steuerungsfunktion $\hat u(x,t)$, z.B. $\hat u : I\!R^n \times [0,T] \to \mathcal{D} \subset I\!R^d$, die eine Lösung von (1.4) ermöglicht und mit der $I(x_0,\hat u)$ für alle x_0 minimal wird.

Bedingungen an $a, b, L, \Phi, \hat u, X_0$:
$a : I\!R^n \times \mathcal{D} \times [0,T] \to I\!R^n$ stetig und es ex. $K>0$ mit $||a(x,u,t)|| \le K(1+||x||+||u||)$
und $||a(x,u,t)-a(y,v,t)|| \le K(||x-y||+||u-v||)\ \forall (x,u,t),(y,v,t)$,
$b : I\!R^n \times \mathcal{D} \times [0,T] \to I\!R^{n\cdot m}$ stetig und es ex. $K>0$ mit $||b(x,u,t)|| \le K(1+||x||+||u||)$
und $||b(x,u,t)-b(y,v,t)|| \le K(||x-y||+||u-v||)\ \forall (x,u,t),(y,v,t)$,
$L : I\!R^n \times \mathcal{D} \times [0,T] \to I\!R$ stetig und es ex. $K>0$ mit $||L(x,u,t)|| \le K(1+||x||+||u||)^2\ \forall (x,u,t)$,
$\Phi : I\!R^n \to I\!R$ stetig und es ex. $K>0$ mit $||\Phi(x)|| \le K(1+||x||)^2\ \forall x$,,
$\hat u : I\!R^n \times [0,T] \to \mathcal{D}$ stetig und es ex. $K>0$ mit $||\hat u(x,t)|| \le K(1+||x||)$
und $||\hat u(x,t)-\hat u(y,t)|| \le K||x-y||\ \forall (x,t),(y,t)$,
$X_0 : \Omega \to I\!R^n$ stoch. unabhängig von (W_t) und $E\,||X_0||^2 < \infty$.

Weiteres Vorgehen: Man betrachtet die Zielfunktion auch für alle Zwischenpunkte (s,x), also $I(s,x,\hat u) := E\left[\int_s^T L(X_t,\hat u(X_t,t),t)\,dt + \Phi(X_T) |\, X_s{=}x\right]$ und hiervon das Differential, das bei einer optimalen Steuerung für alle (s,x) minimal sein müsste. Daraus erhält man hinreichende Bedingungen für den optimalen Wert und eine optimale Steuerung.