Stochastische Prozesse II

6 Erneuerungstheorie: Rückblick und Anwendung

6.1 Rückblick: Behandelte Themen, Schwerpunkte

1. Erneuerungsprozess, Zählprozess, Erneuerungsfunktion, Erneuerungsmaß,
2. Poisson-Erneuerungsprozess und Laplace-Transformierte, Zusammenhang $\psi_F \leftrightarrow \psi_\nu$,
3. Restlebensdauer und Alter: Erwartungswert, Verteilung, Inspektions-Pradox,
4. Regenerative Prozesse, Erneuerungsargument, Erneuerungsgleichung mit Lösung,
5. Grenzwertsätze für $t \to \infty$: 5.1 a Stationäre Startverteilung G_F,

   5.1 b Verhalten von S_n/n, N_t/t, bewertete Erneuerungsprozesse, R_t/t,

   5.2 a Verhalten von $U(t)/t$, 5.2 b Schranken für $U(t)$,

   5.3 Der Hauptsatz der Erneuerungstheorie – hier: nicht-arithmetisch, Äquivalenz,
   $U(t+h) - U(t) \to h/\mu$, $\tilde{U} * z(t) \to 1/\mu \int_0^\infty z(s)\,ds$ (z dRi), $P(V_t \le v) \to G_F(v)$,

   5.4 Beweis des Hauptsatzes: Coupling, terminales A_∞, $U(t+\delta) - U(t) > 0\ \forall t \ge T$,

   5.5 a Anwendung des Hauptsatzes: $U(t) - t/\mu \to (\sigma^2+\mu^2)/2\mu^2 - \mu_1/\mu$,

   5.5 b Der Hauptsatz für diskrete Erneuerungsprozesse – hier $U(n+1) - U(n) \to 1/\mu$

6.2 Alters- und Blockerneuerung – hier immer $F = G$ –

Alterserneuerung (AE): Erneuerung bei Ausfall oder Alter T.
Wann lohnt sich AE? Kosten eines Ausfalls $= c$, einer geplanten Ersetzung $= c_A$.
Durchschnittskosten **ohne** AE: $\overline{c} := c \cdot U(t)/t \approx c/\mu$ (langfristig),
Durchschnittskosten **mit** AE: Zeit bis Ersetzung: $Y_i^T := \min(Y_i, T)$, $\mu^T := EY_i^T$,

$$\mu^T = \int_0^\infty (1 - F_i^T(y))\,dy = \int_0^T (1 - F(y))\,dy = \mu \cdot G_F(T)\ (< \mu),$$

also $\overline{c_A} = [c \cdot F(T-) + c_A(1 - F(T-))]\,/EY_i^T = \dfrac{c}{\mu}\,\dfrac{1 - \varrho_A\,((1-F(T-))}{G_F(T)}$ $\left(\varrho_A := \dfrac{c - c_A}{c}\right)$.

AE lohnt sich: $\dfrac{1 - \varrho_A\,((1-F(T-))}{G_F(T)} < 1$, T optimal: $T \to \dfrac{1 - \varrho_A\,((1-F(T-))}{G_F(T)} = \text{Min!}$

Blockerneuerung (BE): Erneuerung bei Ausfall **und** zu festen Zeiten $T, 2T, 3T, \ldots,$
Wann lohnt sich BE? Kosten eines Ausfalls $= c$, einer geplanten Ersetzung $= c_B$.
Durchschnittskosten **ohne** BE (s.o.): $\overline{c} := c \cdot U(t)/t \approx c/\mu$ (langfristig),
Durchschnittskosten **mit** BE: $\overline{c_B} = \dfrac{1}{T}\,[\,c \cdot U(T-) + c_B\,]$.

BE lohnt sich: $\dfrac{1}{T}\,[\,c \cdot U(T-) + c_B\,] < \dfrac{c}{\mu} \Leftrightarrow U(T-) + c_B/c < T/\mu$

$$\Leftrightarrow EV_{T-} - EY_1 + T + \mu\, c_B/c < T \Leftrightarrow EV_{T-} < \mu(1 - c_B/c) := \mu\,\varrho_B,$$

T optimal: $T \to \dfrac{1}{T}\,[c \cdot U(T-) + c_B/c] = \text{Min!}$