Stochastische Prozesse II

5 Verhalten von Erneuerungsprozessen für $t \to \infty$

5.5 Ergänzungen zum Hauptsatz der Erneuerungstheorie

Satz Et 5.10: $U(t) - \frac{t}{\mu} \to \frac{1}{2}\frac{\sigma^2+\mu^2}{\mu^2} - \frac{\mu_1}{\mu}$ $(t\to\infty)$ mit $\mu_1 = EY_1$, $\mu = EY_2$, $\sigma^2 = \operatorname{Var} Y_2$ (vgl. Et 5.5).

Beweis: Zu $Y_1 = 0$: $z(t) := \tilde{U}(t) - \frac{t}{\mu} \Rightarrow z(t) = \hat{U}(t) - G_F * \tilde{U} = (1-G_F) * \tilde{U} =: z * \tilde{U}(t)$.

$\Rightarrow$ (mit Et 5.6 (b)) $Z(t) \to \frac{1}{\mu}\int_0^\infty z(s)\,ds = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty [1-G_F(s)]\,ds = \frac{1}{\mu} E\bar{Y}_1 = \frac{1}{2\mu^2}(\sigma^2+\mu^2)$.

5.6 Der Hauptsatz für diskrete Erneuerungsprozesse

Satz Et 5.11: (entspricht Et 5.6 im diskreten Fall)

Ist $Y_1, Y_2 \in \mathbb{N}_0$ und $d := ggT\{k \geq 0 : P(Y_2 = k) > 0\} = 1$, dann sind äquivalent f. $n\to\infty$, $\mu := EY_2$:

(a) $U(n) - U(n-1) \to \frac{1}{\mu}$,   (b) $\tilde{U} * z(n) \to \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^\infty z(k)$, falls r.S. ex. + endl.,

(c) $P(V_n = k) \to g_F(k) := \frac{1}{\mu}[1-F(k-1)] = \frac{1}{\mu}\sum_k^\infty f_m$, (d) $P(W_n = k) \to g_F(k+1) = \frac{1}{\mu}[1-F(k)] = \frac{1}{\mu}\sum_{m=k+1}^\infty f_m$.

Bemerkung zur Def. von g_F: $g_F(k) = G_F(k) - G_F(k-1) = \frac{1}{\mu}\int_{k-1}^k [1-F(s)]\,ds = \frac{1}{\mu}[1-F(k-1)]$, da F rechtsstetig ist.

Satz Et 5.12: Unter den Vorauss. von Et 5.11 gilt Aussage (a) und damit auch (b), (c), (d).

Beweis: (a) Sei $f_k := P(Y_2 = k)$, $k \geq 0$ (also $\sum_0^\infty f_k = 1$). Sei $u_n := U(n) - U(n-1) = \sum_1^\infty P(S_k = n)$, entspr. $\tilde{u}_n = \tilde{U}(n) - \tilde{U}(n-1)$.

Im Folg. nur für $f_0 = 0$, d.h. $Y_2 \geq 1$ (nach Resnick, S. 221 ff.), es geht auch allg., analog zu Et 5.8.

Außerdem: hier nur $F = G$, zu allg. G s. u.

Sei also $f_0 = 0$. Man benutzt die Eigenschaft $p_{ii}^{(n)} \to \frac{1}{m_{ii}}$ $(n\to\infty)$ von rekurr. MK mit Periode 1.

Sei die MK $(X_n, n\geq 0)$ def. durch $P(X_0 = 0) = 1$ und $p_{n-1,n} := p_n := P(Y_2 > n \mid Y_2 > n-1)$, $p_{n-1,0} = q_n := 1 - p_n$

$\Rightarrow f_{00}^{(n)} = p_1 p_2 \cdots p_{n-1} q_n = \frac{P(Y_2 > 1)}{P(Y_2 > 0)} \cdot \frac{P(Y_2 > 2)}{P(Y_2 > 1)} \cdots \frac{P(Y_2 = n)}{P(Y_2 > n-1)} = P(Y_2 = n) = f_n$.

$\Rightarrow (S_n, n \geq 1)$ stoch. gleich $(\tau_0^{(n)}, n \geq 1) \Rightarrow \frac{1}{m_{00}} = \frac{1}{\mu}$, $p_{00}^{(n)} = P(X_n = 0 \mid X_0 = 0) = P(\text{Ern. z. Zt. } n \mid X_0 = 0) = u_n$

und nach d. Grenzwertsatz $u_n \to \frac{1}{m_{00}} = \frac{1}{\mu}$, also $U(n+h) - U(n) \to \frac{h}{\mu}$ für $h = 1, 2, \dots$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b): Hier für $(z(k), k \geq 0)$ mit $\underline{z(k) \geq 0}$ und $\sum_0^\infty z(k) < \infty$ (also $z(k) \to 0$). (Geht auch für abs. konv.)

Sei $\varepsilon > 0$, $\Rightarrow \exists k_0$: für $k > k_0$ gilt $\frac{1}{\mu} - \varepsilon \leq u_k \leq \frac{1}{\mu} + \varepsilon$ (da $u_k \to \frac{1}{\mu}$ für $k \to \infty$). Bem: $\tilde{u}_k = u_k$ f. $k \geq 1$ ~~vg. F=G.~~

$\Rightarrow \tilde{U} * z(n) = \sum_{k=0}^n z(n-k)\tilde{u}_k = \sum_0^{k_0} + \sum_{k_0+1}^n \leq \sum_0^{k_0} \dots + \left(\frac{1}{\mu}+\varepsilon\right)\sum_{k_0+1}^n z(n-k) = \underbrace{\sum_0^{k_0} z(n-k) u_k}_{\to 0} + \left(\frac{1}{\mu}+\varepsilon\right)\sum_{m=0}^{n-k_0-1} z(m)$

$\Rightarrow \limsup \tilde{U} * z(n) \leq \left(\frac{1}{\mu}+\varepsilon\right)\sum_{m=0}^\infty z(m)$, ebenso $\liminf \tilde{U} * z(n) \geq \left(\frac{1}{\mu}-\varepsilon\right)\sum_0^\infty z(m) \Rightarrow$ (b).

(a) für allg. G: Sei $g(n) := P(Y_0 = n)$, $\Rightarrow u_n = \tilde{U} * g(n)$, mit (b) folgt $u_n \to \frac{1}{\mu}\sum_0^\infty g(k) = \frac{1}{\mu}$.

(b) $\Rightarrow$ (d) $(F=G)$ $Z(t) := P(W_n = k) = P(W_n = k, S_1 > n) + P(W_n = k, S_1 \leq n) = P(S_1 > n) 1_{\{k\}}(n) + \sum_{m=0}^n f_m Z_{n-m} = z(n) + f * Z(n)$

$\to \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^\infty z(n) = \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^\infty [1-F(n)] 1_{\{k\}}(n) = \frac{1}{\mu}[1-F(k)] = g_F(k+1)$. $\left(F(k) = \sum_{m=0}^k f_m\right)$.

G allg. (vgl. Et 5.6): $P(W_n = k) = P(W_n = k, S_1 > n) + \sum_{m=0}^n g_m Z^=_{n-m}$ (mit g_m zu G),

1. Term $\leq P(S_1 > n) \to 0$, 2. Term $= \sum_{m=0}^\infty [Z^=_{n-m} 1_{\{0,\dots,n\}}(m)] g_m \to g_F(k+1)$, da $[\dots] \leq 1$, $\to g_F(k+1)$.

(c) $\Leftrightarrow$ (d): Aus $P(W_n \geq k) = P(V_{n-k} > k)$ folgt $\lim_n P(W_n \geq k) = \lim_n (V_{n-k} > k)$, daraus die Beh.

(c) $\Rightarrow$ (a): Wie bei Et 5.6. (Die dortige Faltung lässt sich auch als Summe schreiben.)