Stochastische Prozesse II

5 Verhalten von Erneuerungsprozessen für $t \to \infty$

5.4 Beweis des Hauptsatzes der Erneuerungstheorie

Satz Et 5.8: Es gelten die zentralen Aussagen (a), (b), (c), (d) aus Satz Et 5.6.

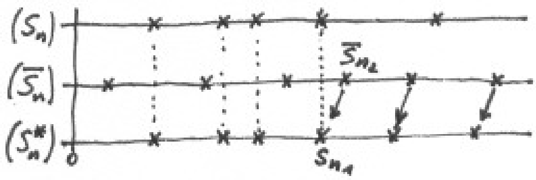
Beweis: Wir zeigen (c): $P(V_t \le v) \to G_F(v) = \frac{1}{\mu}\int_0^v [1-F(s)]\,ds$ für $t \to \infty$

Die Haupt-Idee ist „Coupling" (Lindvall 1975), Voraussetzung weiterhin: „F nicht arithmetisch".

Vorbemerkung: Wir werden den Satz für $F = G$ beweisen. Für allg. G folgt die Beh. mit $P(V_t \le v) = P(V_t \le v, Y_1 > t) + \int_0^\infty P^{Y_1}(ds)\, P(V^{=}_{t-s} \le v)$, der 1. Term ist $\le P(Y_1 > t) \to 0$ $(t \to \infty)$, im 2. Term gilt $\forall s$: $P(V^{=}_{t-s} \le v) \in [0,1]$ und $\to G_F(v)$ $\Rightarrow$ (mit maj. Konv.) $P(V_t \le v) \to G_F(v)$.

Beweis für $F = G, \mu < \infty$: Wir benutzen $(\bar{S}_n)$ mit $\bar{Y}_1 \sim G_F$, dann gilt $P(\bar{V}_t \le v) = G_F(v)$ $\forall t$.

Wir nehmen o.E. an, dass $(\bar{S}_n)$ und (S_n) (mit $Y_1 \sim F$) stoch. unabhängig sind und betrachten beide Prozesse nebeneinander:



Wenn für n_1, n_2 $0 \le \bar{S}_{n_2} - S_{n_1} < \delta$ (δ klein), dann lassen wir statt (S_n) den Prozess $(\bar{S}_n)$ weiterlaufen: (S_n^*)

Dies tritt (für geg. $\delta > 0$) P-f.s. ein: Schritt 1 (s.u.).

Schritt 2: Man wählt die erste solche Möglichkeit und zeigt: (S_n) u. (S_n^*) sind stoch. gleich. Der Grund: Für $k \ge n_2$ sind die $\bar{S}_{k+1} - \bar{S}_k$ untereinander u. von der Vorgeschichte unabhängig.

Schritt 3: Z.z. $\lim_{t\to\infty} P(V_t > v) = 1 - G_F(v)$, nach Schritt 2 äquiv. zu $\lim_{t\to\infty} P(V_t^* > v) = 1 - G_F(v)$. Dazu benutzt man $P(\bar{V}_t > v) = 1 - G_F(v)$ und obere/untere Schranken bzgl. d. Verschiebung ($< \delta$).

Schritt 1: Man wählt $\delta > 0$ und setzt $A_i := \bigcup_{j \ge i} \{\bar{V}_{S_j} < \delta\}$ (es gibt $j \ge i$ mit Abstand S_j zu $\bar{S}_n < \delta$), dann ist $A_\infty = \lim_{i\to\infty} A_i$ (fallend) $= \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \{\bar{V}_{S_j} < \delta$ unendl. oft$\}$, $\Rightarrow P(A_i) \to P(A_\infty)$ (stetig v.o.)

Man sieht „leicht", dass $P(A_i)$ unabh. von i ist, also gilt $P(A_0) = P(A_i) = P(A_\infty)$.

Man zeigt dann, dass $P(A_\infty)$ nur $= 0$ oder $= 1$ sein kann, also auch $P(A_i) = 0$ oder 1.

Hierzu: A_∞ ist ein „terminales Ereignis" bzgl. $((Y_n, \bar{Y}_n))$, d.h. unabh. vom Anfang d. Folge, solche Ereignisse sind zu sich selbst st.u., also gilt $P(A_\infty) = P(A_\infty) \cdot P(A_\infty) \Rightarrow\ = 0$ oder 1.

Man muss dann nur noch zeigen, dass $P(A_\infty)$ bzw. $P(A_0) > 0$ ist.

Dazu braucht man Lemma Et 5.9: Zu $G = F$ nicht-arithm., $\delta > 0$ $\exists T: U(t+\delta) - U(t) > 0\ \forall t \ge T$.
Dies ist äquivalent zu $P(N_{t+\delta} - N_t > 0) > 0\ \forall t \ge T$. (Beweis s. Resnick S. 246 f.)

Leider kann man Lemma Et 5.9 nicht direkt auf $\{\bar{V}_{S_j} < \delta\}$ anwenden, weil $(\bar{S}_n)$ kein normaler EP ist. Man zeigt deshalb zuerst $P(A_0 | \bar{Y}_1 = t) > 0\ \forall t$.

Dafür gilt $P(\bigcup_{j=0}^{\infty} \{\bar{V}_{S_j} < \delta\} | \bar{Y}_1 = t) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} \{t + \sum_{\ell=2}^{n} \bar{Y}_\ell \in (S_j, S_j + \delta)\}) \overset{\forall j}{\ge} P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{t + \cdots\})$

$$= \int_0^\infty P^{S_j}(ds)\, P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{t + \sum_2^n \bar{Y}_\ell \in (s, s+\delta)\}) \ge \int_{T+t}^{\infty} P(N_{s-t+\delta} - N_{s-t} > 0)\, P^{S_j}(ds)$$

Nach L. Et 5.9 ist der Integrand > 0, für geeignetes (großes) j ist auch $P^{S_j}([T+t, \infty)) > 0$.
$\Rightarrow P(A_0) = \int P^{\bar{Y}_1}(dt)\, P(A_0 | \bar{Y}_1 = t) > 0 \Rightarrow P(A_\infty) > 0 \Rightarrow P(A_\infty) = 1 \Rightarrow$ es ex. n: $\bar{S}_{n_2} - S_{n_1} \in (0, \delta)$.