# Stochastische Prozesse II

## 5 Verhalten von Erneuerungsprozessen für $t \to \infty$

### 5.3 Der Hauptsatz der Erneuerungstheorie

**Satz Et 5.6:** Für einen **nicht-arithmetischen** Erneuerungsprozess
($\nexists\, d>0$ mit $P^{S_n}(d\cdot \mathbb{N}_0)=1\,\forall n$) sind – für $t\to\infty$, $\mu := EY_2$ – **äquivalent**:

(a) $U(t+h)-U(t) \;\to\; \dfrac{h}{\mu}$, **(Blackwell-Erneuerungs-Theorem)**

(b) $\tilde{U} * z(t) \;\to\; \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_0^\infty z(s)\,ds$, **falls** $z$ **dRi** [1]), **(Hauptsatz der Erneuerungstheorie)**

(c) $P(V_t \le v) \;\to\; G_F(v) \quad (v>0)$,

(d) $P(W_t < w) \;\to\; G_F(w) \quad (0 \le w \le t)$.

[1]) Eine Abb. $z$ heißt direkt-Riemann integrierbar (dRi), wenn für die Obersummen $\overline{\sigma}(h)$ und Untersummen $\underline{\sigma}(h)$ auf $[0,\infty)$ mit Teilpunkten $h\cdot\mathbb{N}_0$ gilt:
$\overline{\sigma}(h) < \infty\ \forall h$ und $\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) \to 0$ für $h \to 0$.

Beweis: (c) $\Leftrightarrow$ (d) folgt aus Satz Et 3.3: $P(W_t<w) = P(V_{t-w} \le w)$.

(b) $\Rightarrow$ (d): <u>Für $F=G$</u> gilt nach Et 4, Bsp. 3 $Z(t) := P(W_t<w) = z(t) + F*Z(t)$, wobei
$z(s) := (1-F(s))\mathbb{1}_{[0,w)}(s)$ und mit Satz Et 4.2: $Z(t) = z * \tilde{\mathcal{U}}(t)$ $(\tilde{\mathcal{U}}(t) = u\ S_1 \equiv 0)$,

$\overset{(b)}{\Rightarrow} P(W_t<w) = \tilde{\mathcal{U}} * z(t) \to \frac{1}{\mu}\int_0^\infty z(s)\,ds = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty (1-F(s))\mathbb{1}_{[0,w)}(s)\,ds = \frac{1}{\mu}\int_0^w (1-F(s))\,ds = G_F(w)$.

<u>Für allg. $G$</u> gilt: $P(W_t<w) = P(W_t<w, S_1>t) + P(W_t<w, S_1 \le t)$

$\le P(S_1>t) \to 0 \qquad = \int_0^t Z(t-s)\,G(ds)$

$\le \quad \cdots \quad + \int_0^\infty \underbrace{Z(t-s)\mathbb{1}_{[0,t]}(s)}_{\le 1 \text{ und } \to G_F(w)}\,G(ds) \xrightarrow{\text{maj. Konv.}} G_F(w)$.

(c) $\Rightarrow$ (a): $\mathcal{U}(t+h) - \mathcal{U}(t) = \int_{[0,s]} \tilde{\mathcal{U}}(h-s)\,P^{V_t}(ds)$ $\quad \overset{V_t}{\underset{t \quad t+s}{\longleftrightarrow}}\ \tilde{\mathcal{U}}(h-s)\ \underset{t+h}{\vert}$ $\quad = \int_{[0,s]} P(V_t \le h-s)\,\tilde{\mathcal{U}}(ds)$ (Faltung kommutativ)

mit $P(V_t \le h-s) \le 1$ und $\tilde{\mathcal{U}}$ auf $[0,h]$ endlich $\xrightarrow{\text{maj. Kr.} + (c)} G_F * \tilde{\mathcal{U}}(h) = \overline{\mathcal{U}}(h) = \frac{h}{\mu}$.

(a) $\Rightarrow$ (b): Mit <u>Lemma Et 5.7</u>: Aus $F(h)<1$ folgt $\sup_{t\ge 0}[\tilde{\mathcal{U}}(t+h) - \tilde{\mathcal{U}}(t)] \le \frac{1}{1-F(h)} =: c(h) < \infty$.

Beweis: $(t \ge 0)$ $\tilde{\mathcal{U}} - F*\tilde{\mathcal{U}} = F^{0*} \Rightarrow 1 = \int_0^t (1-F(t-s))\tilde{\mathcal{U}}(ds) \ge \int_{t-h}^t \cdots \ge (1-F(h))[\tilde{\mathcal{U}}(t) - \tilde{\mathcal{U}}(t-h)]$.

$z$ ist dRi (n.V.), die Ober/Untersummen $\overline{\sigma}(h), \underline{\sigma}(h)$ sind Integrale über $\overline{z}_h(s), \underline{z}_h(s)$,
wobei (z.B.) $\overline{z}_h(s) = \sum_{n=1}^\infty \overline{c}_{nh}\, z_{nh}(s)$ mit $z_{nh}(s) = \mathbb{1}_{[(n-1)h,\,nh)}(s)$,

für $z_{nh}(s)$ ist $z_{nh}(t-s) = \mathbb{1}_{(t-nh,\,t-(n-1)h]}(s)$, daraus ergibt sich

$\tilde{\mathcal{U}} * z_{nh}(t) = \int_{[0,t]} z_{nh}(t-s)\,\tilde{\mathcal{U}}(ds) = \tilde{\mathcal{U}}(t-(n-1)h) - \tilde{\mathcal{U}}(t-nh) \xrightarrow{(a)} \frac{h}{\mu} = \frac{1}{\mu}\int z_{nh}(s)\,ds$.

Die Fkt. $\overline{z}_h(s), \underline{z}_h(s)$ sind linear in $z_{nh}$, aber eine unendl. Reihe,
deshalb benötigt man für $\tilde{\mathcal{U}} * \overline{z}_h(t)$ u. $\tilde{\mathcal{U}} * \underline{z}_h(t)$ die glm. Schranke aus Lemma Et 5.7.
Als Grenzwerte für $t\to\infty$ erhält man die Ober/Untersummen mit Faktor $\frac{1}{\mu}$.
Wegen „$z$ ist dRi" ergibt sich für $h\to 0$ $\tilde{\mathcal{U}} * z(t) \to \frac{1}{\mu}\int_0^\infty z(s)\,ds$.