Stochastische Prozesse II

5 Verhalten von Erneuerungsprozessen für $t \to \infty$

5.3 Verhalten von $U(t)/t$ für $t \to \infty$

Satz Et 5.4: Sei $\mu_1 := EY_1$, $\mu_2 := EY_2$, nicht notwendig endlich.

Dann gilt: $\frac{U(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ für $t \to \infty$.

Beweis: Vorbemerkung. Aus $\frac{1}{t} N_t \xrightarrow{P.f.s.} \frac{1}{\mu}$ folgt $E(\frac{1}{t} N_t) \to \frac{1}{\mu}$ nicht ohne weitere Voraussetzg.

$\boxed{\text{Wir zeigen } \frac{1}{t} U(t) \to \frac{1}{\mu} \text{ mit Et 3.2: } EV_t = EY_1 + EY_2\, U(t) - t \quad (*)}$.

(1) Z.z. $\boxed{\underline{\lim} \frac{U(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}}$: Für $\mu = \infty$ ist dies trivial. Sei also $\mu < \infty$.

Im Fall $\mu_1 = EY_1 < \infty$, also auch bei $F = G$, können wir $(*)$ direkt benutzen:

Aus $EV_t > 0$ folgt $\underline{\lim} (\mu \cdot \frac{U(t)}{t}) = \underline{\lim} \left(\frac{EV_t}{t} - \frac{\mu_1}{t} + 1 \right) \geq 1$, also $\underline{\lim} \frac{1}{t} U(t) \geq \frac{1}{\mu}$.

Für beliebiges G benutzen wir $\underline{U_0} := \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}$ und $\underline{\lim} \frac{1}{t} U_0(t) \geq \frac{1}{\mu}$ (dies ist der Fall $F = G$):

Aus $U = \sum_{n=1}^{\infty} G * F^{(n-1)*} = G + G * U_0$ (mon. Konv.) folgt mit Lemma v. FATOU

$\underline{\lim} \frac{1}{t} U(t) = \underline{\lim} \Big[\underbrace{\tfrac{1}{t} G(t)}_{\to 0} + \frac{1}{t} \int U_0(t-z)\, dG(z) \Big] \geq 0 + \int \underline{\lim} \frac{1}{t} U_0(t-z)\, dG(z) \geq \int \frac{1}{\mu}\, dG(z) = \frac{1}{\mu}$.

(2) Wie bei Et 5.2 benutzen wir $Y_i^{(c)}$, $S_n^{(c)} \leq S_n$, $N_t^{(c)} \geq N_t$, $U^{(c)}(t) \geq U(t)$, $EV_t^{(c)} \leq c$.

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \overline{\lim} (\mu^{(c)} \frac{1}{t} U^{(c)}(t)) \leq \overline{\lim} \left(\frac{c}{t} - \frac{1}{t} \mu_1^{(c)} + 1 \right) = 1$

$\Rightarrow \overline{\lim} \frac{1}{t} U(t) \leq \overline{\lim} \frac{1}{t} U^c(t) \leq \frac{1}{\mu^{(c)}} \quad \forall c \Rightarrow (\text{mit } \mu^{(c)} \uparrow \mu)\ \boxed{\overline{\lim} \frac{U(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}}$.

5.4 Untere und obere Schranken für $U(t)$

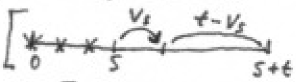
Satz Et 5.5 Sei $\mu_1 := EY_1 < \infty$, $\mu := EY_2 < \infty$, $\sigma^2 := \operatorname{Var} Y_2$.

Dann gilt: (a) $U(t) > \frac{t}{\mu} - \frac{\mu_1}{\mu}$ für $0 \leq t < \infty$

(b) $U(t) \leq \frac{t}{\mu} - \frac{\mu_1}{\mu} + \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu^2}$ für $0 \leq t < \infty$

Beweis: (a) folgt direkt aus Et 3.2: $EV_t = EY_1 + EY_2 \cdot U(t) - t$ mit $EV_t > 0$.

(b) folgt (trickreich) mit Eigenschaften von $\tilde{U}(t)$, der Ern.fkt. zu $\tilde{Y}_1 \equiv 0$.

(b1) $\tilde{U}(s+t) \leq \tilde{U}(s) + \tilde{U}(t)$ [ l.S. $= \tilde{U}(s) + E(\tilde{U}(t - V_s)) \leq$ r.S.]

(b2) $U(t) = E(\tilde{U}(t - Y_1))$, $t \geq 0$ [mit dem gleichen Argument wie bei (b1)]

Aus Et 5.1: $U(t) = \frac{t}{\mu} \Leftrightarrow \bar{Y}_1$ hat VF $t \mapsto G_F(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)]\, ds$.

$\Rightarrow$ (b3) $E\bar{Y}_1 = \frac{1}{2\mu} (\sigma^2 + \mu^2)$ [folgt mit Fubini aus $E\bar{Y}_1 = \int_0^{\infty} s \frac{1}{\mu} [1 - F(s)]\, ds = \int_0^{\infty} \frac{s}{\mu} \int_s^{\infty} P^{Y_2}(dy)\, dx$]

und (b4) $E(\tilde{U}(t - \bar{Y}_1)) = \frac{t}{\mu}$ $(t \geq 0)$ [folgt aus (b2)]

Sind nun $\bar{Y}_1, \hat{Y}_1$ zwei u.a. ZV mit VF G_F, dann gilt $\underline{\tilde{U}(t)} = E[\tilde{U}(t + \bar{Y}_1 - \hat{Y}_1 + \hat{Y}_1 - \bar{Y}_1)] =$

$\overset{(b1)}{\leq} E(\tilde{U}(t + \bar{Y}_1 - \hat{Y}_1)) + E(\tilde{U}(\hat{Y}_1 - \bar{Y}_1)) = E[E[\tilde{U}(t + \bar{Y}_1 - \hat{Y}_1) | \bar{Y}_1]] + E[E[\tilde{U}(\hat{Y}_1 - \bar{Y}_1) | \bar{Y}_1]] =$

$\overset{(b2)+(b4)}{=} E[\frac{1}{\mu}(t + \bar{Y}_1)] + E[\frac{1}{\mu} \bar{Y}_1] = \frac{t}{\mu} + \frac{2}{\mu} E\bar{Y}_1 = \underline{\frac{t}{\mu} + \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu^2}}$, $\Rightarrow U(t) = E(\tilde{U}(t - Y_1)) = E\left(\frac{t - Y_1}{\mu} + \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu^2} \right) =$ Bed.