

Stochastische Prozesse II

5 Verhalten von Erneuerungsprozessen für $t \rightarrow \infty$.

Gesucht ist das asymptotische Verhalten von $N_t, U(t), V_t$ u. $Z \ast \tilde{U}(t)$.

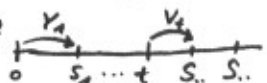
Wir wissen bereits: $U(t) \rightarrow \infty$ (Et 1.3) und $N_t \rightarrow \infty$ (Et 1.1).

5.1 Stationäres Verhalten von Erneuerungsprozessen (EP)

Vorbemerkung: Wann ist ein EP „stationär“?

vgl. HMK (X_t) stationär $\Leftrightarrow P(X_t = i) = P(X_0 = i) = \pi_i$ für alle $t \geq 0$

$\Leftrightarrow (X_t)$ ist regenerativ für jedes feste t_1 : Verhalten ab t_1 wie ab $t_0 = 0$.

Wann ist bei einem EP (S_n) das Verhalten ab t wie ab $t_0 = 0$? 

Definition: Ein Erneuerungsprozess heißt stationär, falls $P^{V_t} = P^{Y_1} \quad \forall t \geq 0$.

Folgerung Et 5.1: (a) EP (S_n) stationär $\Rightarrow EV_t = EY_1 \quad \forall t \geq 0$

(b) EP (S_n) stationär, $\mu_1 := EY_1 < \infty \Rightarrow EY_2 \cdot U(t) = t \quad \forall t \Rightarrow \mu := EY_2 < \infty$ u. $U(t) = \frac{t}{\mu} \quad \forall t$

(c) EP (S_n) hat $U(t) = \frac{t}{\mu} \quad \forall t$ ($\mu = EY_2 < \infty$) $\Leftrightarrow Y_1$ hat VF $G_F(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds, t \geq 0$.

Beweis: (a) aus d. Def., (b1) aus Et 3.2 ($EV_t = EY_1 + EY_2 \cdot U(t) - t$), (b2): $\mu = \infty$ geht nicht,

(c1) aus $U = G + U \ast F$ (vgl. Et 1.3): $G(t) = \frac{t}{\mu} - \frac{1}{\mu} \int_0^t F(t-u) du = \frac{t}{\mu} - \frac{1}{\mu} \int_0^t F(s) ds \quad (s = t-u)$,

(c2) vgl. $\psi_u = \psi_0 / (1 - \psi_F)$ bestimmen sich U und G gegenseitig (bei festem F).

5.2 Verhalten von N_t

Satz Et 5.2: (a) $S_n/n \rightarrow EY_2 := \mu$, (b) $N_t/t \rightarrow 1/\mu \quad (t \rightarrow \infty)$ P-f.s.

Beweis: (a) folgt aus dem starken Gesetz d. gr. Zahlen für $\mu = EY_2 < \infty$:

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow EY_2 = \mu$ P-f.s. $\Rightarrow \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} Y_1 + \frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n Y_i \rightarrow EY_2$ P-f.s. für $n \rightarrow \infty$.

Falls $EY_2 = \infty$, betrachtet man $Y_i^{(c)} := \min(c, Y_i)$, $S_n^{(c)} := \sum_{i=1}^n Y_i^{(c)} \leq S_n$,

$\Rightarrow \liminf \frac{1}{n} S_n \geq \liminf \frac{1}{n} S_n^{(c)} \xrightarrow{\text{P-f.s.}} EY_2^{(c)} \uparrow \infty$ (mon. Konv.), also $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{\text{P-f.s.}} \infty = EY_2$.

(b) Aus $S_{N_t} \leq t \leq S_{N_t+1}$ folgt $\frac{N_t}{N_t+1} \leq \frac{N_t+1}{S_{N_t+1}} = \frac{N_t}{S_{N_t+1}} \leq \frac{N_t}{t} \leq \frac{N_t}{S_{N_t}}$.

Mit $t \rightarrow \infty$ u. $N_t \rightarrow \infty$ (Et 1.1) folgt $\frac{N_t}{N_t+1} \xrightarrow{\text{P-f.s.}} 1$ und mit (a) $\lim \frac{V_t}{t} = \frac{1}{\mu}$ P-f.s.

Definition: Bewertete Erneuerungsprozesse besitzen neben $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$

Bewertungen / „Erträge“ $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ für $(S_{n-1}, S_n]$, mit $R_2, R_3, \dots$ id. vert., $R_1, R_2, \dots$ st. ab.

Sei $R(t) := \sum_{n=1}^{N_t} R_n = \sum_{n=0}^{\infty} R_n 1_{\{S_n \leq t\}}$, der Ertrags-Prozess, z.B. Schadenssummen.

Folgerung 5.3: Wenn $ER_2 < \infty, EY_2 = \mu \in (0, \infty)$, dann ex. $r := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{ER_2}{\mu}$, Ertragsrate.

Beweis: $r = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{N_t} R_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^{N_t} R_n}{N_t} \cdot \frac{N_t}{t} \rightarrow ER_2 \cdot \frac{1}{\mu}$.

Bemerkung: Aussagen über $U(t)/t = \frac{EV_t}{t}$ und über $\frac{ER(t)}{t}$ folgen in 5.3.