

Stochastische Prozesse II

4 Erneuerungsgleichungen

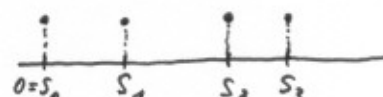
Wir betrachten zunächst gewisse „Hintergrundprozesse“ zum Ern.-Prozess (S_n) :

Definition: Ein stoch. Prozess $(X_t, t \geq 0)$ heißt regenerativer Prozess, falls es eine Stoppzeit S_n gibt (einen Regenerationszeitpunkt), für den

- (a) der in S_n gestoppte Prozess $(X_{t \wedge S_n})$ und der Post- S_n -Prozess (X_{S_n+t}) stoch. unabh. sind,
- (b) der Post- S_n -Prozess die gleiche Verteilung hat wie der ursprüngliche Prozess (X_t) .

Folgerung: Es gibt dann weitere Regenerationszeitp. $S_2, S_3, \dots$ und (S_n) ist e. normaler Ern.-Prozess.

Bemerkung: Der einfachste regen. Prozess ist $X_t = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{S_n=t\}}$, falls (S_n) ein normaler Ern.-Prozess ist.



Typisches Beispiel: Homogene MK mit $S_1, S_2, \dots$ Eintrittszeitpunkten in $i \in I$ (bzw. $X_0 = i$). Die S_n sind Stoppzeiten und es gilt die starke Markove-Eigenschaft.

Folg. Et 4.1: Ist $t \geq 0$, A_t ein durch $(X_u, u \geq 0)$ beschriebenes Ereignis, z.B. $\{V_t > v\}$, $F \nabla F$ zu S_1 , dann gilt $\underline{Z}(t) := P(A_t) = P(A_t \cap \{S_1 > t\}) + \sum_{i \in I} P^{S_1}(d_i) P(A_{t-S_1}) =: \underline{z}(t) + (F * \underline{Z})(t)$.

(*) $\underline{Z}(t) = \underline{z}(t) + (F * \underline{Z})(t)$ heißt Erneuerungsgleichung, die Herleitung Ern.-Argument.

Beispiel 1: (G, F bel.) $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G * F^{(n)}(t) = G(t) + F * \sum_{n=1}^{\infty} G * F^{(n-1)}(t) \Rightarrow U(t) = G(t) + F * U(t)$.

Beispiel 2: $G=F$; $U=U_0 := \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}$. Sei $A_t := \{V_t > v\}$, $v > 0$.

$$\Rightarrow P(V_t > v) = P(V_t > v, Y_1 > t) + P(V_t > v, Y_1 \leq t) = P(Y_1 > t+v) + \int_0^t P^{Y_1}(d_1) P(V_{t-s} > v)$$

Mit $Z(t) := P(V_t > v)$ und $z(t) = 1 - F(t+v)$ gilt $\underline{Z}(t) = z(t) + (F * \underline{Z})(t)$.

Beispiel 3: $G=F$; $Z(t) := P(W_t < w) = P(W_t < w, Y_1 > t) + P(W_t < w, Y_1 \leq t) = z(t) + \int_0^t P^{Y_1}(d_1) P(W_{t-s} < w)$, w.g. $Y_1 > t \Rightarrow W_t = t$ folgt $\underline{z}(t) = [1 - F(t)] 1_{[0, w)}(t)$ und damit $\underline{Z}(t) = z(t) + F * \underline{Z}(t)$.

Für Bsp. 2 folgt mit Et 3.4 $\underline{Z}(t) = 1 - F(t+v) + (1 - F(\cdot + v)) * U_0(t)$, also $\underline{Z}(t) = z(t) + z * U_0(t) =: z * \tilde{U}(t)$.

Satz Et 4.2: Die Gleichung (*) mit $z \in \mathcal{M} := \{h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid h \text{ messbar, auf } [0, t] \text{ besch. } \forall t, h(x) = 0 \text{ f. } x < 0\}$ hat die Lösung $\underline{Z}(t) = z(t) + (z * U_0)(t) = (z * \tilde{U})(t)$ mit $\underline{Z} \in \mathcal{M} \mid \begin{matrix} U_0(t) \text{ mit } G=F \\ \tilde{U}(t) \text{ mit } Y_1=0 \end{matrix}$

Außerdem: Die Lösung ist aus $\mathcal{M}$ und in $\mathcal{M}$ gibt es genau eine Lösung.

Beweis: (i) z.z. $\tilde{U} * z \in \mathcal{M}$: Sei $T > 0 \Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq T} (\tilde{U} * z)(t) = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t z(t-u) \tilde{U}(du) \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \tilde{Z}(t) \cdot \tilde{U}(T) < \infty$.

(b) $\tilde{U} * z$ ist Lösung:

$$F * (\tilde{U} * z) = (F * \tilde{U}) * z = (\tilde{U} - F^{(0)}) * z = \tilde{U} * z - z \Rightarrow \tilde{U} * z = z + F * (\tilde{U} * z).$$

(c) Seien Z_1, Z_2 Lösungen, $Z_i \in \mathcal{M} \Rightarrow$ für $H := Z_1 - Z_2$ gilt:

$$H = Z_1 - Z_2 = (z * z) + F * (Z_1 - Z_2) = F * H, \text{ iteriert } H = F^{(n)} * H$$

$$\Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq T} |H(t)| = \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t H(t-y) F^{(n)}(dy) \right| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} |H(t)| F^{(n)}(T)$$

wegen $U_0(T) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(T) < \infty$ folgt $\sup_{0 \leq t \leq T} |H(t)| \rightarrow 0$ ($F^{(n)}(T) \rightarrow 0$ f. $n \rightarrow \infty$).