

Stochastische Prozesse II

2.1 Erneuerungsprozesse: Beispiele und Laplace-Transformation

Beispiel B1: Sei $P^{Y_1} = P^{Y_2} = \text{Exp}(\alpha) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, $P^{S_n} = \Gamma_{n,\alpha} = (\text{Exp}(\alpha))^{n*}$.

$\Gamma_{n,\alpha}$, die Gamma-Verteilung, hat die Dichte $\gamma_{n,\alpha}(x) = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\alpha x} 1_{(0,\infty)}(x)$ [$\Gamma(n) = (n-1)!$] und die Verteilungsfunktion $\int_0^t \gamma_{n,\alpha}(x) dx = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!} = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!}$ ($= P(N_t \geq n)$). Also gilt: $P(N_t = n) = e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!}$, $P^{N_t} = \text{Poisson}(\alpha t)$, $U(t) = EN_t = \alpha t$, $\nu = \alpha \cdot \lambda|_{\mathbb{R}_+} =: \alpha \lambda_+$.

Interpretation: Die S_n sind auf $\mathbb{R}_+$ (im Mittel) gleichmäßig verteilt: $\nu([a, b]) = \alpha \cdot \lambda([a, b])$.

Bemerkung: 1. Bei $P^{Y_i} = \text{Exp}(\alpha)$ altern die Ersatzteile nicht: $\frac{P(Y_1 > s+t)}{P(Y_1 > s)} = P(Y_1 > t)$.

2. Wg. $P^{N_t} = \pi(\alpha t)$ heißt (N_t) **Poisson-Zählprozess**, (S_n) **Poisson-Erneuerungsprozess**.

Beispiel B2: $P^{Y_1} = P^{Y_2} = B(p)$. $P^{S_n} = ?$, $P^{N_t} = ?$, z.z. $U(t) = \frac{1-p}{p} + [t] \cdot \frac{1}{p}$. Skizze für $p = 2/3$?

Definition: Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}_+$ und es sei $\psi_\mu(t) := \int e^{-tx} \mu(dx)$ **endlich** $\forall t > a \geq 0$,

dann heißt ψ_μ die **Laplace-Transformierte (LT)** von μ . [„die LT von μ existiert“]

Ist $\mu = P^X$, so heißt $\psi_X := \psi_\mu$ auch die LT von X – und es gilt $\psi_X(t) = Ee^{-tX}$.

Beispiele: $\psi_{\text{Exp}(\alpha)}(t) = \alpha/(\alpha+t)$, $\psi_{B(p)}(t) = 1-p+pe^{-t}$, $\psi_{\lambda_+}(t) = 1/t$ ($t > 0$).

Et 2.1 Folgerung: (a) $\psi_{aX+b}(t) = e^{-bt}\psi_X(at)$, $a > 0$, $b \geq 0$. [einsetzen und ausklammern!]

(b) $\psi_{\mu*\nu} = \psi_\mu \cdot \psi_\nu$ und $\psi_{X+Y} = \psi_X \cdot \psi_Y$, falls X, Y st.u. [$Ee^{-t(X+Y)} = Ee^{-tX} Ee^{-tY}$]

(c) $EX = -\psi'_X(0+)$, $EX^2 = \psi''_X(0+)$, $EX^n = (-1)^n \psi_X^{(n)}(0+) \leq \infty \forall n$. [Abl. vert. erlaubt]

(d) Die Zuordnung $\mu \rightarrow \psi_\mu$ ist umkehrbar eindeutig. [s. z.B. Feller II]

(e) $\psi_{\mu_n} \rightarrow \psi_\mu \Leftrightarrow \mu_n \rightarrow \mu$ ($\Leftrightarrow F_{\mu_n}(x) \rightarrow F_\mu(x) \forall x: F_\mu$ stetig in x) [s. z.B. Feller II]

Andere Transformierte: (Faltung, Ableitungen, Eindeutigkeit, Stetigkeit entspr.)

Fourier-Transformierte (=char. Fkt.) $\phi_X(t) := Ee^{itX} = \psi_X(-it)$, [ex. $\forall t \in \mathbb{R}$]

Momentenerzeugende Funktion $M_X(t) := Ee^{tX} = \psi_X(-t)$, [bei Abl. ohne „-“]

Erzeugende Funktion $g_X(s) := Es^X = \psi_X(-\ln s)$ für $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$. [Umkehr einf.]

Et 2.2 Folgerung: ψ_G, ψ_F seien die LT von P_G bzw. P_F , dann gilt:

$$\nu \text{ hat die LT } t \rightarrow \psi_\nu(t) = \frac{\psi_G(t)}{1 - \psi_F(t)}, \quad t \geq 0.$$

Beweis: Sei $t > 0$, dann ist $\psi_F(t) = \int e^{-tx} P^{Y_2}(dx) \leq 1$, sogar < 1 , da sonst $P(Y_2=0) = 1$.

$\Rightarrow \psi_\nu(t) = \int e^{-tx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} P^{S_n} \right) (dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{S_n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_G(t) (\psi_F(t))^{n-1} = \text{r.S.}$

Beispiele: B1: $G=F$, $\psi_{Y_i}(t) = \psi_F(t) = \alpha/(\alpha+t)$ (s.o.), $\psi_\nu(t) = \alpha/t$, $\psi_{\alpha\lambda_+}(t) = \alpha/t$ (s.o.).

B2: $\psi_F(t) = 1-p(1-e^{-t})$ (s.o.), $\psi_\nu = \frac{1-p(1-e^{-t})}{p(1-e^{-t})} = \frac{1}{p} \frac{1}{1-e^{-t}} - 1 = \frac{1}{p} - 1 + \frac{1}{p}e^{-t} + \frac{1}{p}e^{-2t} + \frac{1}{p}e^{-3t} + \dots$

Et 2.3 Folgerung: Bei einem *normalen* Erneuerungsprozess bestimmen sich folgende Größen

gegenseitig (eindeutig): $P^{Y_i} \xleftrightarrow{(1)} F \xleftrightarrow{(2)} \psi_F \xleftrightarrow{(3)} (P^{S_n}) \xleftrightarrow{(4)} (P^{N_t}) \xleftrightarrow{(5)} (EN_t) = U \xleftrightarrow{(6)} \nu \xleftrightarrow{(7)} \psi_\nu$, insbesondere ist durch (EN_t) bereits P^{N_t} bestimmt, sogar⁽⁸⁾ $P^{(N_{t_1}, \dots, N_{t_k})}$.

Beweis: (1) u. (6) ist klar, (2) u. (7) s. Et 2.1 (d), (3) folgt mit $\psi_F \leftrightarrow (\psi_F)^n = \psi_{S_n} \leftrightarrow P^{S_n}$,

(4) folgt aus $\{N_t \geq n\} \stackrel{*}{=} \{S_n \leq t\}$ (Et 1.1 (a)), $\xleftrightarrow{(5)}$ ist klar, $\xleftrightarrow{(5)}$ folgt aus (6), (7), $\psi_\nu \leftrightarrow \psi_F$

(Et 2.2 mit $G=F$) und (3), (4). Mit $*$ folgt auch $(P^{Y_i}) \xrightarrow{\text{st.u.}} P^{(S_{n_1}, \dots, S_{n_k})} \rightarrow P^{(N_{t_1}, \dots, N_{t_k})}$.