Stochastische Prozesse II

1.2 Einführung in die Erneuerungstheorie (Fortsetzung)

Konstruktion eines W-Raums: Sei $\boxed{G}$ die Verteilungsfunktion (VF) von Y_1,
sei $\boxed{F}$ die VF von $Y_2, Y_3, \ldots$ und P_G, P_F seien die zugehörigen W-Maße über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$.
Wir setzen $\Omega := \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, $\mathcal{A} := \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathbb{B} = \mathbb{B}^{\mathbb{N}^*}$, $P := P_G \otimes \bigotimes_{i=2}^{\infty} P_F = P_G \otimes P_F \otimes P_F \otimes \ldots$.
Ist $\boxed{G_n}$ die VF von S_n, so gilt: $G_0 = 1_{\mathbb{R}_+}$, $G_1 = G$, $G_n = G * F \overset{(n-1)}{* \ldots *} F$.
Dabei ist (z.B.) $\boxed{G*F}$ die VF von $Y_1 + Y_2$, die **Faltung** von G und F
mit $(G * F)(t) = \int_{[0,t]} G(t-x) F(dx) = \int_{[0,t]} F(t-x) G(dx)$. (Es gilt $G(0-) = F(0-) = 0$!)
Die Faltung ist assoziativ, und man setzt $F^{0*} := 1_{\mathbb{R}_+}$, $F^{n*} := F^{(n-1)^*} * F = F * F^{(n-1)^*}$.

Bemerkung: Die Faltung ist auch für maßdef. Fkt. $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $F(0-) = 0$ definiert.

Generalvoraussetzung: $\boxed{F(0) < 1} \Leftrightarrow P(Y_2 = 0) < 1$. Andernfalls wäre $S_n \equiv S_1$ P-f.s. $\forall\, n$.

Et 1.2 Folgerung: (a) $P(S_\infty < \infty) = 0$ $\quad (\Rightarrow\ P(N_t < \infty) = 1\ \ \forall\, t)$.

(b) $EN_t = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \le t) < \infty\ \ \forall\, t \ge 0$.

Beweis: (a) Mit $F(0) < 1$ ex. $h > 0$ mit $F(h) < 1$ (F ist rechtsseitig stetig).
Sei $t > 0$, $n_0 := \lfloor t/h \rfloor$, $n > n_0$ $\Rightarrow$ $P(S_n \le t) \le P(Y_i > h$ höchstens n_0 mal in $2 \le i \le n) =$
$= P(Y_i \le h$ mind. $(n-1-n_0)$-mal in $2 \le i \le n) \le F(h)^{n-1-n_0}$ (für alle $n > n_0$) $\qquad (*)$.
Mit Et.1 (c) folgt $P(S_\infty \le t) = \lim_n P(S_n \le t) = 0$ und $P(S_\infty < \infty) = \lim_t P(S_\infty \le t) = 0$.
(b) Nach Def.: $EN_t = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \le t)$, mit $(*)$ $EN_t \le \sum_{n=1}^{n_0} P(S_n \le t) + \sum_{n_0+1}^{\infty} F(h)^{n-1-n_0} < \infty\ \forall\, t$.

Definition: (a) Die Abb. $\boxed{t \to U(t) := EN_t}$, $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ heißt **Erneuerungsfunktion**.

(b) Das Maß $\nu := \sum_{i=1}^{\infty} P^{S_i}$ heißt das (zugeh.) **Erneuerungsmaß**.

Interpretation von ν: $\nu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in B) = \sum_{n=1}^{\infty} E\, 1_B(S_n) = E \sum_{n=1}^{\infty} 1_B(S_n)$.
$\nu(B)$ ist also die erwartete Anzahl von Erneuerungen in $B \subset \mathbb{R}_+$.
$\nu([0,t]) = E \sum_{n=1}^{\infty} 1_{[0,t]}(S_n) = EN_t = U(t)$ ($< \infty$ nach Et.2 (b)).

Et 1.3 Folgerung: (a) U ist maßdefinierende Funktion von ν, insbesondere **endlich**.

(b) $U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \le t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G * F^{(n-1)*}(t) = G * \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t)$.
(c) $U(t) \uparrow \infty$ für $t \to \infty$.

Beweis: (a) ist bereits gezeigt, bei (b) ist nur noch die letzte Gleichheit zu zeigen:
Da alles ≥ 0 ist, folgt diese mit monotoner Konvergenz: $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,t]} F^{n*}(t-x)\, G(dx) =$
$= \int_{[0,t]} \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t-x)\, G(dx)$. (c) folgt aus $U(t) = \nu([0,t]) \uparrow \nu(\mathbb{R}_+) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \in \mathbb{R}_+) = \infty$.

Et 1.4 Folgerung: (a) f, g seien μ-Dichten zu F, G $\Rightarrow$ ν hat μ-Dichte $h = \sum_1^\infty g * f^{(n-1)*}$.

(b) Ist F und G stetig auf $[0, \infty)$, so ist auch U stetig (nicht notw.: $F(0) = G(0) = 0$!).

Beweis: (a) Probe! (b) z.z. $F*G$ stetig, $U(t) = \sum_1^\infty G_n(t) < \infty \Rightarrow$ konv. glm. auf $[0, t_0]$.