

Stochastische Prozesse II

Erneuerungstheorie

1 Einführung

Anwendung: Ersetzung eines Bauteils (Batterie, Glühbirne, Zündkerzen, Motor)

bei „**Ausfall**“ nach zufälliger Lebensdauer.

„**Erneuerung**“ := Ersetzung durch ein neues (neuwertiges) Teil.

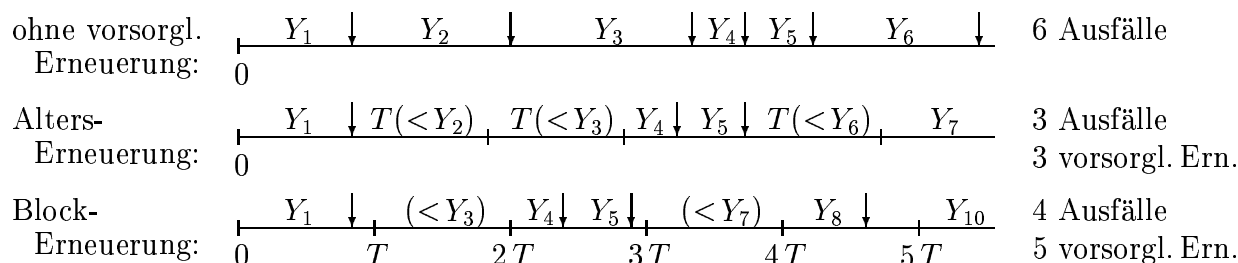
„**vorsorgliche/geplante Erneuerung**“ := Ersetzung vor Ausfall,
verursacht i.d.R. **geringere** Ausfallkosten, aber **höhere** Erneuerungskosten.

Fragen: Wie oft fällt (im Mittel) das Teil aus? Lohnt sich eine vorsorgliche Erneuerung?
Wann soll gegebenenfalls vorsorglich erneuert werden?

Mögliche **Erneuerungs-Politiken:**

- nur **Ausfall-Erneuerung**,
- **Alters-Erneuerung:** jeweils spätestens bei Alter T ,
- **Block-Erneuerung:** jeweils zur Zeit $T, 2T, 3T, \dots$ und bei Ausfall,
sinnvoll bei vielen gleichartigen Ausfall-Teilen, z.B. Leuchtstoffröhren in Hörsälen.

Zeitlicher Ablauf: (schematisch, Y_i seien jeweils die Lebensdauern)



Modell: Gegeben seien zufällige **Lebensdauern** (ZV) $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, \geq 0$,
alle Y_i seien stoch. unabhängig, $Y_2, Y_3, \dots$ seien identisch verteilt
(das erste Teil muss im Zeitpunkt 0 nicht notwendig neu sein!).

Erneuerungszeitpunkte: $S_n := \sum_{i=1}^n Y_i, n \in \mathbb{N}^*, S_0 := 0$.

Die Folge der Erneuerungszeitpunkte ($S_n, n \in \mathbb{N}_0$) heißt **Erneuerungsprozess**,

($N_t := \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n \leq t\}}, t \geq 0$) heißt (**zugehöriger**) **Zählprozess**.

Et 1.1 Folgerung: (a) $\boxed{\{S_n \leq t\} = \{N_t \geq n\} \forall n, t.}$

Diese Formel wird i. F. ständig gebraucht!

(Beweis: s. Def. von N_t – und Abbildung $\rightarrow$)

(b) $N_t \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ (sonst ist ein $Y_i = \infty$).

(c) Sei $S_{\infty} := \sum_{i=1}^{\infty} Y_i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Dann gilt: $\{S_n \leq t\} \downarrow \{S_{\infty} \leq t\}$ für $n \rightarrow \infty$,

$\{S_{\infty} \leq t\} = \{N_t = \infty\} \uparrow \{S_{\infty} < \infty\}$ für $t \rightarrow \infty$.

Interpretation: Bei $S_{\infty} \leq t$ bzw. $S_{\infty} < \infty$
besitzt die Folge (S_n) einen Häufungspunkt ($= S_{\infty}$).
Daraus folgt $Y_i(\omega) \rightarrow 0$. (Kann das vorkommen?)

