

Stochastische Prozesse

Stochastische Differential-Gleichungen

Nur betrachten hier nur stochastische Differential-Gleichungen der Form $dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$, $t \in [0, T]$, d.h. die Koeffizienten hängen von ω nur über X_t ab.

Gegeben sei: $X_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $EX_0^2 < \infty$, davon unabh. Br. Proz. $(W_t, t \in [0, T])$,
 $\mathcal{F}_t := \sigma(X_0, W_t, t \in [0, T])$, die zugehörige Filtration,
 $a: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $b: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, meßbare Fkt.

12.9 Definition: Ein stochastischer Prozeß $(X_t, t \in [0, T])$ heißt Lösung der stoch. Itô-Dgl. $X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s$ (1)
 bzw. $dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$ (1')

- falls (a) X_t ist \mathcal{F}_t -meßbar
 (b) (X_t) besitzt stetige Pfade
 (c) $a(t, X_t) \in \mathcal{L}_T^1$, $b(t, X_t) \in \mathcal{L}_T^2$
 (d) (X_t) erfüllt die Dgl. (1) bzw. (1').

Bemerkung: $a \in \mathcal{L}_T^p \Leftrightarrow \int_0^T |a|^p dt < \infty$. Aus (a) und (c) folgt $a(\cdot) \in \mathcal{M}_n^1[0, T]$, $b(\cdot) \in \mathcal{M}_n^2[0, T]$.

12.10 Satz: Die Itô-Dgl. (1) besitzt eine (bis auf Standard-Modifik.) eindeutige Lösung (X_t) mit (c) sup $E(X_t^2) < \infty$, falls $K > 0$ ex. mit
 (L) $|a(t, x) - a(t, y)| \leq K|x - y| \quad \forall t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}$ (Lipschitz-Bedingung)
 $|b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$
 (W) $|a(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2) \quad \forall t, x, y$ (Wachstums-Beschränkung)
 $|b(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2)$

Bemerkung: $a(\cdot)$ beschreibt die „Drift“, $b(\cdot)$ die „Diffusion“.

12.11 Satz: Die Lösungen der Itô-Dgl. (1') und der Stratonovich-Dgl.
 $dX_t = \underline{a}(t, X_t)dt + b(t, X_t) \circ dW_t$ (2') mit $\underline{a}(t, x) = a(t, x) - \frac{1}{2}b(t, x) \frac{\partial b(t, x)}{\partial x}$
 stimmen überein. \underline{a} heißt die „korrigierte Drift“.

12.12 Beispiele: B1: $dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dW_t \Leftrightarrow dX_t = X_t \circ dW_t$
 Lösung mit $\frac{dX_t}{X_t} = \frac{1}{2}dt + dW_t \Rightarrow \ln X_t - \ln X_0 = W_t \Rightarrow X_t = X_0 e^{W_t}$ (Probe!)

B2: $dX_t = [\alpha b(X_t) + \frac{1}{2}b(X_t)b'(X_t)]dt + b(X_t)dW_t$ mit $b(x) > 0$.

Ist $h(x)$ Stammfkt. zu $\frac{1}{b(x)}$, so gilt $X_t = h^{-1}(\alpha t + W_t + h(X_0))$.

Bemerkung: Entsprechend kann man stoch. Dgl. in \mathbb{R}^k behandeln mit m -dim. Brownschen Prozessen $(W_t^j, 1 \leq j \leq m)$ (W_t^i, W_t^j st. unabh.) Die Fkt. $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ sind dann Matrizen. Itô-Formel und \underline{a} entspr.

Bemerkung: Man kann die Lösungen der stoch. Dgl. simulieren:
 Zuerst feste Pfade $X_n(\omega)$ zu festen Pfaden $W_n(\omega)$ mit $\tilde{X}_{n+1} = \tilde{X}_n + a(t_n, \tilde{X}_n)\Delta + b(t_n, \tilde{X}_n)\Delta W_n$, dann Stichproben verschiedener Pfade $W_n(\omega)$, daraus versch. Pfade $X_n(\omega)$.

1. Nachtrag: Beweis zur Stratonovich-Korrektur

Wegen der Übereinstimmung der Terme $a(t, X_t)dt$ ist für eine Lösung (X_t) der Stratonovich-Diff.-Gleichung zu zeigen (in Integraldarstellung):

$$\int b(t, X_t) \circ dW_t = \int b(t, X_t) dW_t + \frac{1}{2} b(t, X_t) \frac{\partial b}{\partial x}(t, X_t).$$

Approximation der linken Seite mit $\Sigma \dots$, dann Taylor-Formel:

$$\int_0^T b(t, X_t) \circ dW_t = \sum_{n=0}^{N-1} b(t_n + \frac{1}{2} \Delta t_n, X_{t_n + \frac{1}{2} \Delta t_n}) \Delta W_{t_n}, \quad \begin{cases} \Delta t_n = t_{n+1} - t_n \\ \Delta W_{t_n} = W_{t_{n+1}} - W_{t_n} \end{cases}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left[b(t_n, X_{t_n}) + \frac{\partial b}{\partial t}(t_n, X_{t_n}) \frac{1}{2} \Delta t_n + \frac{\partial b}{\partial x}(t_n, X_{t_n}) \cdot \Delta X_{t_n} \right] \Delta W_{t_n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} b(t_n, X_{t_n}) \Delta W_{t_n} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial b}{\partial t}(t_n, X_{t_n}) \frac{1}{2} \Delta t_n \cdot \Delta W_{t_n} + \dots$$

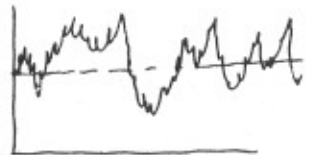
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta X_{t_n} = X_{t_n + \frac{1}{2} \Delta t_n} - X_{t_n} \\ \text{wird gemäß dem} \\ \text{stoch. Differentialquotient} \\ \text{ersetzt.} \end{array} \right.$$

$$\dots + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial b}{\partial x}(t_n, X_{t_n}) a(t_n, X_{t_n}) \frac{1}{2} \Delta t_n \cdot \Delta W_{t_n} + \frac{\partial b}{\partial x}(t_n, X_{t_n}) b(t_n, X_{t_n}) \frac{1}{2} \Delta W_{t_n} \Delta W_{t_n}.$$

Der erste Term konv. gegen $\int b(t, X_t) dW_t$ (wie gewünscht),
 der zweite und dritte Term gehen wegen $\Delta t_n \Delta W_{t_n}$ gegen 0, wie bei der Itô-Formel,
 beim letzten Term kann (im Grenzfalle) wie beim Itô-Formel-Beweis $(\Delta W_{t_n})^2$ durch Δt_n ersetzt werden, dann konvergiert er gegen $\frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial x}(t, X_t) b(t, X_t) dt$, dem 2. Term der rechten Seite der Beh. \square

2. Nachtrag: Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess.

Es soll ein stationärer Itô-Prozess konstruiert werden.



Elemente: Störung mit konstantem Gewicht: βdW_t , würde aber Prozess aufschaukeln, deshalb: Rückstellgröße proportional Auslenkung: $-\alpha(X_t - m)$

die $dX_t = -\alpha(X_t - m)dt + \beta dW_t$ hat die Lösung $X_t = m + (X_0 - m)e^{-\alpha t} + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$

Interpretation: Anfangsauslenkung $X_0 - m$ und Störung z. Zt. s (βdW_s) klingen exponentiell ab.

Stationarität? Bei $X_0 \sim N(c, \sigma^2)$ hat X_t eine Normalvert. $N(\mu, \tau^2)$ mit $\mu = m + (c - m)e^{-\alpha t}$ und $\tau^2 = \sigma^2 e^{-2\alpha t} + \beta^2 e^{-2\alpha t} \int_0^t e^{2\alpha s} ds = \beta^2 \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha} + \sigma^2 e^{-2\alpha t}$

Für $c = m$ und $\sigma^2 = \beta^2 / 2\alpha$ ist der Prozess also stationär: $X_t \sim N(m, \frac{\beta^2}{2\alpha})$
 (Genauer: die Zustands-Vert. ist stationär, mit Markov-Eigenschaft (wg. konstanten Gewichten) folgt die Stationarität des Prozesses.)

Dieser Prozess heißt Ornstein-Uhlenbeck-[Geschwindigkeits]-Prozess.

Bemerkung: Aktienkurse werden oft mit $Y_t = Y_0 \cdot e^{X_t}$ modelliert.