

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Präsenzaufgabenblatt 12:

Besprechung am Montag, 2. 2. 04

Aufgabe P 12.1:

Es sei (X_t) ein Brownscher Prozess. Zeigen Sie:

- (a) $(X_1 - X_{1-t})$ ist ein Brownscher Prozess auf $[0, 1]$.
- (b) $(\sqrt{2}X_{t/2})$ ist ein Brownscher Prozess.
- (c) Der Prozess (Y_t) mit $Y_0 := 0$ und $Y_t := t \cdot X_{1/t}$ ($t > 0$)
ist ein Brownscher Prozess.

Aufgabe P 12.2:

Es sei (X_t) ein Brownscher Prozess.

Für $t \in T' := [0, 1]$ sei $Y_t := X_t - t \cdot X_1$ (die Brownsche Brücke).

- (a) Zeigen Sie, dass die endlich-dimensionalen (Rand-)Verteilungen von (Y_t)
Normalverteilungen sind.
- (b) Berechnen Sie $E(Y_t)$ und zeigen Sie, dass $\text{Kov}(Y_s, Y_t) = \min(s, t) - s \cdot t$
für $s, t \in [0, 1]$. Besitzt (Y_t) unabhängige Zuwächse?
- (c) Zeigen Sie, dass $(X'_t) := ((1 + t)Y_{t/(1+t)})$ ein Brownscher Prozess ist.