Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Präsenzaufgabenblatt 1: Besprechung am Montag, 27. 10. 03

Aufgabe P 1.1:

Es sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen und $S_0, S_1, S_2, \ldots$ die Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ $(S_0 := 0)$.

(a) Welche (der in der Vorlesung genannten) klassifizierenden Eigenschaften besitzen die beiden Prozesse (X_n) und (S_n)?

(b) Was gilt bei identisch verteilten X_n?

Aufgabe P 1.2:

Es sei $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t) = (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ der Zustandsraum eines Stochastischen Prozesses.
Zeigen Sie:

(a) Die folgenden σ-Algebren über $\Omega = \mathcal{X}^{\mathbb{N}_0}$ stimmen überein. $[\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}))]$

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}\left(\bigcup_{t=0}^{\infty} X_t^{-1}(\mathcal{B}_t)\right), \quad \widehat{\mathcal{A}} := \mathcal{A}\left(\bigcup_{t=0}^{\infty} \mathrm{pr}_{\{0,\ldots,t\}}^{-1}\left(\bigotimes_{i=0}^{t} \mathcal{B}_i\right)\right).$$

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A}\left(\bigcup_{t=0}^{\infty}\left\{\mathop{\times}_{i=0}^{t} B_i \times \mathop{\times}_{i=t+1}^{\infty} \mathcal{X}_i,\ B_i \in \mathcal{B}_i\right\}\right),$$

(b) Die Projektionen X_t sind genau dann $\overline{\mathcal{A}}$-$\mathcal{B}_t$-meßbar, wenn $\overline{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$ gilt.

(c) Der Erzeuger $\mathcal{Z}$ von $\widehat{\mathcal{A}}$ ist ein Mengen-Ring in Ω (ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\emptyset \in \mathcal{R}$, $A \cup A' \in \mathcal{R}$, $A \setminus A' \in \mathcal{R}$ für $A, A' \in \mathcal{R}$.)

Aufgabe P 1.3:

Zeigen Sie, dass ein null-stetiger endlicher Inhalt μ ein Maß ist.
Dazu:

(a) Ein Inhalt ist definiert wie ein Maß, aber mit Additivität statt σ-Additivität.

(b) Null-Stetigkeit ist Stetigkeit von oben, eingeschränkt auf absteigende Folgen $(\mathcal{A}_i)$ mit $\mu(A_i) < \infty$ und $\bigcap_i \mathcal{A}_i = \emptyset$.