§ 9 Martingale

Literatur: Bauer (W.-theorie u. Grundz. d. Maßtheorie), Kap. XI.

Motivation: Es gibt in der Anwendung Prozesse, die nicht die Markov-Eigenschaft erfüllen, z. Beispiel ein (faires) Spiel (X_t = Kapital eines Spielers), bei dem das Verhalten des Spielers (etwa der Einsatz bei der nächsten Runde) von der vollen Vorgeschichte abhängen darf. Trotzdem möchte man den Verlauf für große t kennen.

Im folgenden sei T stets eine (halb-) geordnete Parametermenge, meist $T = \mathbb{N}_0$, $T = \mathbb{R}_+$.

Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum, $(\mathcal{A}_t, t \in T)$ eine isotone Familie von σ-Alg. in $\mathcal{A}$ ($s \le t \Rightarrow \mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t \subset \mathcal{A}$). $(X_t, t \in T)$ heißt $(\mathcal{A}_t)$-adaptiert, falls $X_t : \Omega \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ $\mathcal{A}_t$-$\mathcal{B}$-meßbar oder (äquiv.) $\mathcal{A}_t^0 := \sigma(X_u, u \le t) \subset \mathcal{A}_t$ für alle $t \in T$.

Bemerkung 9.1: Oft benutzt man $\mathcal{A}_t^0 = \mathcal{A}_t$, aber auch oft $\mathcal{A}_t^0 \subsetneqq \mathcal{A}_t$, z. B. $\mathcal{A}_t = \sigma((X_u, Y_u), u \le t)$ wobei (Y_u) ein zweiter Prozeß ist, z. B. zur Randomisierg.

Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum, $(\mathcal{A}_t)$ isotone Familie von σ-Algebren in $\mathcal{A}$, $(X_t : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}), t \in T)$ sei $(\mathcal{A}_t)$-adaptiert, und X_t sei integrierbar, $t \in T$.

Dann heißt (X_t) Supermartingal bzgl. $(\mathcal{A}_t)$, wenn für alle $s, t \in T$, $s \le t$ gilt:

(*) $E(X_t \mid \mathcal{A}_s) \le X_s$ P.f.s. d.h. $\int_A X_t \, dP \le \int_A X_s \, dP$ für alle $A \in \mathcal{A}_s$.

(X_t) heißt Submartingal bzgl. $(\mathcal{A}_t)$, wenn $(-X_t)$ ein Supermartingal.

(X_t) heißt Martingal bzgl. $(\mathcal{A}_t)$, wenn (X_t) Sub- und Supermartingal.

Bemerkung 9.2: „Martingal" ist ursprünglich ein gewisser Zügel bei Pferden, dem Prozeß sind sozusagen „Zügel angelegt". „Sub-" bzw. „Super-" gibt an, wo die Zügel angelegt sind: Super = oben ($\le X_s$)

Erste Beispiele von Martingalen: → B 9.0: Zinsbereinigter Aktienkurs bei Arbitrage-Freiheit.

B 9.1: Prozesse (X_t) mit unabh. Zuwächsen, X_t integrierbar und $E(X_t - X_s) \substack{\ge \\ = \\ \le} 0$ sind $\left\{ \begin{array}{l} \text{Submartingale} \\ \text{Martingale} \\ \text{Supermartingale} \end{array} \right.$.

B 9.2: Das stochastische Integral $B(t) = \int_0^t b(s)\, dW_s$ ist e. Martingal ($b(s)$ $\mathcal{A}_s$-meßb.).

Beweis: Sei $s < t$: $E(B(t) \mid \mathcal{A}_s) \approx E\left[\sum_{i=1}^{j} b_\ell(t_{i-1}) \Delta W_{t_i} + \sum_{i=j+1}^{k} b_\ell(t_{i-1}) \Delta W_{t_i} \mid \mathcal{A}_s\right)$ mit $t_j = s$, $t_k = t$

$= \sum_{i=1}^{j} b_\ell(t_{i-1}) \Delta W_{t_i} + \sum_{i=j+1}^{k} E\left[E\left(b_\ell(t_{i-1}) \Delta W_{t_i} \mid \mathcal{A}_t\right) \mid \mathcal{A}_s\right] = \dots + \sum_{i=j+1}^{k} E\left[b_\ell(t_{i-1}) \underbrace{E(\Delta W_{t_i} \mid \mathcal{A}_t)}_{=0} \mid \mathcal{A}_s\right] \approx B(s) + 0.$

B 9.3: Ein „faires" Spiel(*) ist nach Definition ein Martingal. ((*) bei voller Information)

B 9.4: Ist $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, dann ist $(X_t := E(X \mid \mathcal{A}_t))$ ein Martingal.

B 9.5: (Y_n) sei i.i.d Folge von Münzwürfen. Auszahlung $X_n = 0$ bei Kopf, -2^n bei Zahl. Dann ist $(X_n = -2^n Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$ ein Supermartingal (bzgl. $\mathcal{A}_0$), aber (X_n) konvergiert P-f.s. nicht. Beweis: $E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n^0) = E X_{n+1} = -2^{n+1} \cdot \frac{1}{2} \le X_n$ $(\forall \omega)$.

Sei $A := \{\omega : X_n(\omega) \text{ konv. in } \overline{\mathbb{R}}\}$, $A_{0m} [A_{1m}] := \{Y_n = 0 [1] \; \forall n \ge m, Y_{m-1} \ne 0 [1]\}$, $A = \sum_1^\infty A_{0m} + \sum_1^\infty A_{1m}$.

$P(A_{0m}) = P(A_{1m}) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$.

Stochastische Prozesse

B 9.6: Das „Verdoppelungs-Spiel" (Setzen auf „Rot" bis zum 1. Gewinn, bei Verlust doppelter Einsatz) beim üblichen Roulette ein Supermartingal, bei fairer Auszahlung: Martingal. Ohne „0": $X_0=1$, $X_{n+1}=X_n \pm 2^n$ mit W. $\frac{1}{2}$, falls $X_n<0$, sonst $X_{n+1}=X_n=1$. $\Rightarrow E(X_{n+1}|X_1,\dots,X_n)=X_n$. Es folgt $X_n=1$ mit W. $1-2^n$ // $=1-2^n$ sonst. $\Rightarrow X_n \to X_\infty :=1$ (P-f.s.), aber $EX_n=0^{(n\geq 1)} \not\to EX_\infty=1$, im Gegensatz zu den Sätzen der monotonen oder majorisierten Konvergenz.

9.1 Satz (Erster Konvergenzsatz für Supermartingale): Sei $T=\mathbb{N}$, $(\Omega,\mathcal{A},P)$ W-Raum, $(\mathcal{A}_n, n\in\mathbb{N})$ isoton, $\mathcal{A}_n\subset\mathcal{A}$, $(X_n, n\in\mathbb{N})$ Supermartingal bzgl. $(\mathcal{A}_t)$ mit

(9.1) $\sup_n E(X_n^-)<\infty$ oder äquivalent (9.1') $\sup_n E|X_n|<\infty$.

Dann konvergiert (X_n) P-f.s. gegen eine integrierbare Zufallsvar. X_∞.

Beweis zu Satz 9.1: 1. Nach Def. des Supermart. gilt $EX_1\geq EX_2\geq\cdots$

2. Zu (9.1) $\Leftrightarrow$ (9.1'): $EX_n^- \leq E|X_n| = EX_n + 2EX_n^- \leq EX_1 + 2EX_n^-$.

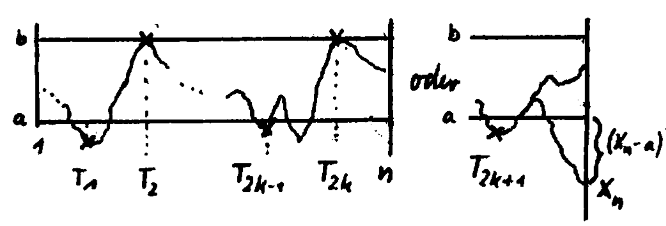
3. Sei $B:=\{X_n$ konvergiert nicht$\}=\{\omega: \underline{\lim}\, X_n(\omega)<\overline{\lim}\, X_n(\omega)\}=$
$=\bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{Q}\\ a<b}}\{\underline{\lim}\, X_n\leq a<b\leq\overline{\lim}\, X_n\} =: \bigcup_{\dots} B_{ab}$. $P(B)\leq\sum_{\dots}P(B_{ab})$.

Falls ein $P(B_{ab})=P(\exists\,\infty$ viele „aufsteigende Überquerungen von $[a,b]$") >0, dann ist auch E(Anzahl „ — " — ") $=: E(\bar{U}_{ab})=\infty$. Dies ist aber nach dem folgenden Hilfsatz wegen (9.1) nicht möglich.

4. $E|X_\infty| = E\,\underline{\lim}\,|X_n| \leq \underline{\lim}\, E|X_n| \leq \sup E|X_n|<\infty$.

Hilfsatz (Doobsche Ungleichung): Sei $(X_n, n\in\mathbb{N})$ ein Supermartingal und $\bar{U}_{ab}^{(n)}$ die Anzahl der „aufsteigenden Überquerungen" von $[a,b]$ in der Folge $X_1,\dots,X_n$. Dann gilt
$$E(\bar{U}_{ab}^{(n)})\leq\frac{1}{b-a}E[(X_n-a)^-]\quad,n\in\mathbb{N}\qquad(a<b).$$

Beweis: Seien $T_1\leq T_2\leq T_3\leq\cdots\leq T_n$ die Zeitpunkte (Stoppzeiten) zu denen X_i erstmals jeweils $\leq a$ $(T_1,T_3,\dots)$ bzw. $\geq b$ $(T_2,T_4,\dots)$, sonst $=n$.



Es gilt: $X_{T_{2j}}-X_{T_{2j-1}}$ $\geq b-a$ falls $j\leq k:=\bar{U}_{ab}^{(n)}$
$= 0$ falls $j\geq k+2$

$j=k+1$: $= X_n - X_{T_{2k+1}}$ $=0$ (1. Skizze. $T_{2k+1}=n$)
$\geq -(X_n-a)^-$ (2. Skizze)

Da (X_n) Supermart. gilt $EX_{T_1}\geq EX_{T_2}\geq\cdots$ (da (X_{T_j}) Supermartingal, s.u.).
Daraus folgt $0\geq\sum_{j=0}^{n/2}E(X_{T_{2j}}-X_{T_{2j-1}})\geq(b-a)E\bar{U}_{ab}^{(n)}-E(X_n-a)^-$.

Def.: T Stoppzeit bzgl $(\mathcal{A}_t, t\in I)\Rightarrow \mathcal{A}_T:=\{A\in\mathcal{A}, A\cap\{T\leq t\}\in\mathcal{A}_t\ \forall t\}$ ist σ-Alg. der T-Vergangenh.

Folgerung: T, T' Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{A}_t, t\in I)$, $T\leq T'$ $\Rightarrow \mathcal{A}_T\subset\mathcal{A}_{T'}$. Für $I\subset\bar{\mathbb{R}}$ gilt $\mathcal{A}_T\subset\mathcal{A}_\infty:=\sigma(\bigcup_t\mathcal{A}_t)$
Für I abz. ist X_T $\mathcal{A}_T$-meßbar. | **Beweis**: $B\in\mathcal{A}_T\Rightarrow B\cap\{T'\leq t\}=B\cap\{T\leq t\}\cap\{T'\leq t\}\in\mathcal{A}_t$.
Zu I ex. $t_n\in I$ mit $\bigcup_n\{T\leq t_n\}=\Omega\Rightarrow\mathcal{A}_T=\bigcup_n\{A\in\mathcal{A}, A\cap\{T\leq t_n\}\}\subset\mathcal{A}_\infty$. $\{X_T\in B\}\cap\{T\leq t\}=\sum_{s\leq t}\cdots\in\mathcal{A}_t$.

Satz: **Martingal-Eigenschaft für Stoppzeiten**: $(X_t, t\in I)$, $I=1,\dots,n$, sei (Super-)Martingal bzgl. $(\mathcal{A}_t, t\in I)$ und $(T_j, j\in J)$, $J=\{1,\dots,p\}$ eine isotone Folge von Stoppz. bzgl $(\mathcal{A}_t)\Rightarrow(X_{T_j})$ (Super-)Mart. bzgl. $(\mathcal{A}_{T_j})$.

Beweisidee: $E|X_{T_j}|=\sum_{i=1}^n\int|\ |1_{\{T_j=i\}}dP<\infty$. Dann für $T_{j+1}-T_j\leq 1$ mit Zerl. $\Sigma\{T_j=i\}$, dann Induktion.

Bemerkung 9.3: In Satz 9.1 folgt nicht $EX_n \to EX_\infty$ und damit kann auch nicht erwartet werden, daß wie in Beispiel 9.4 eine Darstellung (im Martingalfall) $EX_n = E(X_\infty | \mathcal{A}_n)$ $\forall n$ existiert. Dieses Ergebnis erhält man nachfolgend in Satz 9.2 mit einer zusätzlichen Voraussetzung „(X_n) ist „gleichgradig integrierbar". Diese Voraussetzung hat denselben Effekt wie die Existenz einer Majorante im Satz von der majorisierten Konvergenz, ist aber schwächer als diese. (Wir werden dies im nächsten Abschnitt „Konvergenzbegriffe' zeigen.)
Außerdem wird „integrierbar" zu „p-fach integrierbar" verallgemeinert, weil dies ohne Mehraufwand möglich ist.

Definition: Eine Familie $f_i : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $i \in I$ von meßb. Abb. heißt gleichgradig (p-fach) integrierbar, wenn $\forall \varepsilon > 0$ ein (p-fach) integr. $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ ex. mit $\int_{[f_i \geq g]} |f_i|^{(p)} dP \leq \varepsilon$.

9.2 Satz: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum, $(\mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N})$ isoton in $\mathcal{A}$, (X_n) Supermart. bzgl. $(\mathcal{A}_n)$.
Gilt statt (9.1) (9.2) $X_n \geq 0$ oder (X_n) gleichgradig integrierbar, dann gilt (9.1), $X_n \to X_\infty$ P.f.s, stoch. und für (X_n) glgr. int. auch im Mittel und $(X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}$ (!)) ist ein Supermartingal.

Der Beweis benutzt L.v.Fatou bzw. BAUER 20.4 und $\int_A X_n dP \geq \int_A X_m dP$, $A \in \mathcal{A}_n$, $n \leq m$.

9.3 Folgerung: Sei (X_n) wie in 9.2, gleichgradig integrierbar und Martingal. Dann konvergiert X_n gegen X_∞ stochastisch und im Mittel und $(X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}$ (!)) ist Martingal, d.h. (9.3) $X_n = E(X_\infty | \mathcal{A}_n)$ $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 9.4: Jede durch (9.3) aus einer integr. ZV X_∞ mit einer isotonen Folge $(\mathcal{A}_t)$ definierte Folge (X_n) ist gleichgradig integrierbares (!) Martingal.

Bemerkung 9.5: Folgerung 9.3 läßt sich auch auf allgemeine (halbgeordn.) Indexmengen verallgemeinern (zu $s, t \in T$ muß $u \in T$ existieren mit $s \leq u$, $t \leq u$).

Bemerkung 9.6: Für Supermartingale $(X_n, n \in -\mathbb{N}$ (!)) mit $\sup EX_n < \infty$ oder (X_n) Martingal existieren auch $X_{-\infty} = \lim_{n \to -\infty} X_n$.
$(X_n, n \in -\overline{\mathbb{N}})$ ist dann Supermartingal bzw. Martingal.

Schlußbemerkung: Martingale (bzw. Sub-, Super-Martingale) sind ein sehr wirkungsvolles Hilfsmittel für viele Konvergenzprobleme, auch bei vielen angewandten Fragestellungen, z.B. in der Risikotheorie.

Beweis zu 9.2: (1) Aus „(X_n) glgr int" folgt (9.1'), also ex. X_∞ mit $X_n \to X$ P-f.s.,
X_∞ ist int. und $\{X_n \text{ konv.}\} = \{\underline{\lim}\, X_n = \overline{\lim}\, X_n\} \in \mathcal{A}_\infty := \sigma(\bigcup_n \mathcal{A}_n)$, da X_n $\mathcal{A}_\infty$-meßb.
Also ist $X_\infty := (\underline{\lim}\, X_n)\, 1_{\{X_n \text{ konv}\}}$ (z.B.) $\mathcal{A}_\infty$ meßbar.
X_∞ int $\Rightarrow X_\infty$ P-f.s. endlich $\Rightarrow$ o.E. $X_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$.

(2) z.z. $E(X_\infty|\mathcal{A}_n) \le X_n \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}_n$ gilt $\int_A E(X_\infty|\mathcal{A}_n)\,dP \le \int_A X_n\,dP$, l.S. $= \int_A X_\infty\,dP$

Sei $m > n \Rightarrow \int_A X_m\,dP = \int_A E(X_m|\mathcal{A}_n)\,dP \le \int_A X_n\,dP$.

Sei also $X_m \ge 0 \Rightarrow \int X_\infty 1_A\,dP = \int \underline{\lim}_m (X_m 1_A)\,dP \underset{\text{Fatou}}{\le} \underline{\lim}_m \int_A X_m\,dP \le \lim \int_A X_n\,dP$.

Ist (X_n) glgr. int, dann folgt mit Variante der maj. Konv. $\int X_m 1_A\,dP \to \int X_\infty 1_A\,dP$.
(Bauer 20.4)

„Korollar": Falls (X_n) gl.gr. int., dann gilt $X_n \to X$ auch im Mittel. $(A = \Omega)$.

Beweis zu 9.3: Man wende 9.2 und das Korollar auf (X_n) und $(-X_n)$ an.

Beweis zu 9.4: (Vgl. B 9.0.5) a) X_t ist integrierbar: $|X_t| = |E(X|\mathcal{A}_t)| =$
$= |E(X^+|\mathcal{A}_t) - E(X^-|\mathcal{A}_t)| \le E(X^+|\mathcal{A}_t) + E(X^-|\mathcal{A}_t) = E(|X|\,|\mathcal{A}_t)$ $\quad (*)$
Also $E|X_t| \le E(E(|X|\,|\mathcal{A}_t)) = E|X| < \infty$.

(b) (X_t) ist Martingal: Für $s < t$ gilt $E(X_t|\mathcal{A}_s) = E(E(X|\mathcal{A}_t)|\mathcal{A}_s) = E(X|\mathcal{A}_s) = X_s$.

(c) (X_t) ist glgr. int.: Wegen $(*)$ folgt wie beim Beweis von 9.2 mit $A = \{|X_t| \le \alpha\}$

$$\int_{\{|X_t| \ge \alpha\}} |X_t|\,dP \le \int_{\{\dots\}} E(|X|\,|\mathcal{A}_t)\,dP = \int_{\{|X_t| \le \alpha\}} |X|\,dP .$$

Nach der Ungl. von Tschebyschev/Markov gilt $P\{|X_t| \ge \alpha\} \le \frac{1}{\alpha} E|X_t| \overset{(a)}{\le} \frac{1}{\alpha} E|X|$.
Nach einem Satz ⊗ über μ-Stetigkeit von $\nu = \int 1.\, f\,d\mu$ $\;(\nu(A) = \int_A f\,d\mu)$
gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $P(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |X|\,dP \le \varepsilon$.
Für $\alpha \ge \frac{1}{\delta} E|X|$ folgt $\int_{\{|X_t| \le \alpha\}} |X|\,dP \le \varepsilon$, da $P\{|X_t| \ge \alpha\} \le \frac{1}{\alpha} E|X| \le \delta$.

⊗ Hilfssatz: Ist $f \ge 0$, $\int f\,d\mu < \infty$ und $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$, so gilt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\nu(A) \le \varepsilon$, falls $\mu(A) \le \delta$. (vgl. Bauer 17.8).

Beweis: Sei $f_n := \min(f, n)$. Mit d. Satz d. mon. Konv. gilt $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$.
Also ex. N: $\int f\,d\mu - \int f_N\,d\mu \le \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $\delta \le \frac{\varepsilon}{2N}$, $\mu(A) \le \delta$.
Dann gilt $\int_A f\,d\mu \le \int_A f_N\,d\mu + \int_A (f - f_N)\,d\mu \le N\mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon$.