

Stochastische Prozesse I

Markov-Prozesse

Stochastische Prozesse $(X_t : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{B}), T \text{ geordnet})$

mit **Markov-Eigenschaft:** $P^{(X_u, u \leq s, X_t)} = P^{(X_u, u \leq s)} \otimes P^{(X_t | X_s = \cdot)}$

$\Rightarrow$ „CH-K“ $P^{(X_u | X_s = \cdot)}(x, B) = \int P^{(X_t | X_s = \cdot)}(x, dy) P^{(X_u | X_t = \cdot)}(y, B)$

Kurzform: $P_{su}(x, \cdot) = \int P_{st}(x, dy) P_{tu}(y, \cdot) =: P_{st} \circ P_{tu}(x, \cdot), x \in \mathcal{X}$

Satz: Zu Startverteilung $P^{X_{t_0}} = \mu$ und $(P_{st}, s < t)$ mit CH-K
ex. Markov-Prozess (X_t) mit $P^{(X_t | X_s = \cdot)} = P_{st} (s < t)$ (kanonisch).

Homogene MP $(T \subset \mathbb{R})$: $P_{s, s+t} =: P_t$ nur abh. von $t (\geq 0)$

$\Rightarrow$ „CH-K“ $P_{s+t}(x, B) = \int P_s(x, dy) P_t(y, B) = P_s \circ P_t(y, B)$

Markov-Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen $(\mathcal{X} = \mathbb{R}^p!)$:

$$P_{st}(x, x+B) = P_{st}(x', x'+B) =: Q_{st}(B)$$

Homogene MP mit unabh. Zuw.: $P_t(x, x+B) =: Q_t(B)$

= MP mit unabhängigen und stationären Zuwächsen

$\Rightarrow$ „CH-K“ $Q_{s+t}(B) = \int Q_s(dy) Q_t(B-y) = Q_s * Q_t(B)$ (Faltung!)

Definition: Eine Familie $(Q_t, t \geq 0)$ von Verteilungen auf $\mathbb{R}^p$
mit $Q_{s+t} = Q_s * Q_t, s, t \geq 0$ heißt **Faltungshalbgruppe** auf $\mathbb{R}^p$.

Satz: Zu einer Faltungshalbgruppe $(Q_t, t \geq 0)$ ex. ein MP (X_t)
mit unabh. u. stat. Zuwächsen und mit $X_0 = 0, P^{(X_{s+t} - X_s)} = Q_t$.

Beispiele von Faltungshalbgruppen:

Beispiel 1: Deterministische Drift: $Q_t = \varepsilon_t, X_t = t$.

Beispiel 2: Poisson-Prozess: $Q_t = \pi(\alpha t)$ (auf $\mathbb{Z}!$).

Beispiel 3: Brownscher Prozess: $Q_t = \mathcal{N}(0, t)$ auf $\mathcal{X} = \mathbb{R}$
bzw. $Q_t = \mathcal{N}(0, t) \otimes \mathcal{N}(0, t) \otimes \dots \otimes \mathcal{N}(0, t)$ auf $\mathcal{X} = \mathbb{R}^p$.