Stochastische Prozesse I (Kurzskript)

Beispiele von HMKS: „Geburts- und Todesprozesse"

Beschreibung: Population, z.B. Lebewesen wie Fischbestände, Wildbestände,
Geburtenrate, abhängig von der Größe der Population,
Sterblichkeitsrate, ebenfalls abhängig — " — ,

Modellierung durch eine HMKS: Zustand = Größe der Population z. Zt. t:
Zustandsraum $I = \mathbb{N}_0$ oder $I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$.
Startverteilung: Einpunktverteilung oder beliebige Verteilung $(p_i(0))$.
Statt $(q_i) + (r_{ij})$ benutzt man besser (q_{ij}) (vgl. M.4 + M.5), da dies anschaulich dem Begriff „Rate" näher kommt:

„Geburtenrate": $p_{i,i+1}(h) = \lambda_i \cdot h + o(h)$, entsprechend $q_{i,i+1} = p_{i,i+1}'(0) = \lambda_i$

„Sterberate": $p_{i,i-1}(h) = \mu_i \cdot h + o(h)$, entsprechend $q_{i,i-1} = p_{i,i-1}'(0) = \mu_i$

Übergänge zu $i+2, \dots, i-2, \dots$ sollen für kleine h unwahrscheinlich sein,
also $P(|X_{t+h} - X_t| > 1 \mid X_t = i) = o(h)$, „deshalb" $p_{ii}(h) = 1 - \lambda_i h - \mu_i(h) + o(h)$.

Annahmen: In Randpunkten: $\mu_0 = 0$, $\lambda_0 \geq 0$, bei I endl. $\lambda_N = 0$, $\mu_N \geq 0$,
im Inneren: $\mu_i > 0$, $\lambda_i > 0$ (sonst „zerfällt" I).

ÜR-Matrix

$$I = \mathbb{N}_0: \quad (q_{ij}) = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2-\mu_2 & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\lambda_3-\mu_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \text{ bei } I \text{ endl. entspr.}$$

Mit M.5(b) erhält man daraus $q_0 = \lambda_0$, $q_i = \lambda_i + \mu_i$, $r_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$, ...

Nach M.3 konstruiert man daraus $((T_k, Z_k))$, (S_n), (N_t) und $(X_t = Z_{N_t})$.

Kann es dabei ∞-viele Sprünge geben?

Notwendig ist $\sum_{k=0}^{\infty} (\mu_{Z_k} + \lambda_{Z_k})^{-1} < \infty$, also $I = \mathbb{N}_0$, $\sup Z_k \to \infty \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} (\mu_i + \lambda_i)^{-1} < \infty$. *) s.u.

Hinreichend ist (M.7(b)) $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j \in I} r_{ij}^{(k)} (\mu_j + \lambda_j)^{-1} < \infty$ (im Einzelfall zu prüfen!)

Spezialfälle: A: Lineares Wachstum mit Zuwanderung:
$\lambda_i = \lambda \cdot i + a$, $\mu_i = \mu \cdot i$: $\sum (\mu_i + \lambda_i)^{-1} = \sum \frac{1}{i(\lambda+\mu) + a} = \infty$.

B: Warteschlange, 1 Schalter, ∞ Warteraum $(M/M/1/\infty)$: $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = \mu$, q_i beschr.

C: Bedien-Modell: „Klassische Telefonzentrale" $(M/M/\infty/\infty)$: $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = i\mu$.
C ist Spezialfall von A mit $\lambda = 0$. Auch hier endl. viele Sprünge.

D: Warteschlange mit s Schaltern, ∞ Warteraum $(M/M/s/\infty)$: $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = \mu \min(i, s)$.

E: Geburts- und Todesprozesse mit Absorption: $\lambda_0 = 0$
speziell: Lineares Wachstum mit Absorption: $\lambda_i = \lambda \cdot i$, $\mu_i = \mu \cdot i$.

Bei allen Beispielen ist die Frage nach dem Langzeitverhalten interessant: Aussterben? Unbegrenztes Wachstum?
Stellt sich ein Gleichgewicht ein?
Welche Kriterien gibt es dafür?
Wie berechnet man die Gleichgewichtsverteilung?

---

*) Umgekehrt folgt aus $\sum_{i=0}^{\infty} (\mu_i + \lambda_i)^{-1} = \infty$, dass $S_\infty = \infty$ P-f.s.
Dies werden wir im Folgenden meist anwenden.

Stochastische Prozesse I

Verhalten von Standard-HMKS für $t \to \infty$

Definition: $(\pi_i, i \in I)$ mit $\pi_i \geq 0$ heißt stationäre Verteilung zu $(p_{ij}(\cdot))$, wenn gilt: $\sum_{i \in I} \pi_i = 1$ $\underline{(0)}$ und $\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i \, p_{ij}(t)$ $j \in I, t \geq 0$ $\underline{(1)}$.

Zur Motivation: Aus $P(X_0 = i) = \pi_i$, $i \in I$, folgt für eine stat. Vert. $P(X_t = i) = \pi_i$, $i \in I, t \geq 0$.

M.12 Satz: (a) Es existiert $\pi_{ij} := \lim_{t \to \infty} p_{ij}(t)$ für alle $i, j \in I$ und es gilt $\sum_{j \in I} \pi_{ij} \leq 1$ $\forall i$.

(b) Für alle Startvert. $\mathbb{p} := (p_i(0))$ ex. $\lim_{t \to \infty} p_j(t) = \sum_{i \in I} p_i(0) \pi_{ij} =: \pi_j(\mathbb{p})$ und es gilt $\sum_{j \in I} \pi_j(\mathbb{p}) \leq 1$.

(c) Für alle $(\pi_j(\mathbb{p}))$ aus (b) gilt (1) $\pi_j(\mathbb{p}) = \sum_{i \in I} \pi_i(\mathbb{p}) \, p_{ij}(t)$ $j \in I$, $t \geq 0$.

Beweis: (a1) Für eine SÜMF gilt $p_{ii}(t) > 0$ $\forall t$, da $p_{ii}(s+t) \geq p_{ii}(s) p_{ii}(t)$ und $p_{ii}(h) \to 1$ $(h \downarrow 0)$.

(a2) Für alle $h > 0$ ist $(\bar{X}_n := X_{nh}, n \in \mathbb{N}_0)$ eine homogene MK mit diskreter Zeit, $(\bar{X}_n)$ ist aperiodisch.
Also existiert $\lim_{n \to \infty} p_{ij}(nh) = \lim_{n \to \infty} \bar{p}_{ij}^{(n)}$. Mit M.9(b) folgt $\overline{\underline{\lim}}_t \, p_{ij}(t) \lesseqgtr \lim_n p_{ij}(nh) \pm \varepsilon$ für $h \leq h_0(\varepsilon)$, also ex. $\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \lim_{n \to \infty} p_{ij}(nh)$ $(\forall h)$. $\sum_j \pi_{ij} = \sum_j \lim_t p_{ij}(t) \leq \underline{\lim} \, \Sigma \cdots = 1$.

(b) $\lim_t p_j(t) = \lim_t \sum_i p_i(0) p_{ij}(t) \overset{\text{maj. K.}}{=} \sum_i p_i(0) \pi_{ij}$. Aus (a) folgt $\Sigma \pi_j(\mathbb{p}) \leq 1$.

(c) $\sum_i \pi_i \, p_{ij}(t) \leq \lim_s \sum_i p_i(s) p_{ij}(t) = \lim_s p_j(s+t) = \pi_j(\mathbb{p})$. Mit $\Sigma \pi_j(\mathbb{p}) \geq \sum_j \sum_i \pi_i(\mathbb{p}) p_{ij}(t) = \sum_i \pi_i(\mathbb{p})$ folgt „=".

Bemerkung M.12: Wegen $\lim_t p_{ij}(t) = \lim_n p_{ij}(nh)$ gelten die Konvergenz-Aussagen von hom. MK mit diskreter Zeit. Insbesondere ist π_{ij} unabh. von i, falls (X_{nh}) irreduzibel.

Bemerkung M.13: Ist $\sum_j \pi_j(\mathbb{p}) = 1$, dann konv. $p_j(t)$ gegen eine stationäre Verteilung. Ist π_{ij} unabh. von i, dann ist die stationäre Verteilung eindeutig bestimmt.

M.13 Satz: Ist $(p_{ij}(\cdot))$ konservativ und gilt $\underline{(3)}$ $\Sigma \pi_i q_i < \infty$ und $\underline{(3')}$ $\Sigma \pi_i < \infty$, so sind äquivalent: (1), $\underline{(2)}$ $\sum_i \pi_i q_{ij} = 0$ $\forall j$ und $\underline{(2')}$ $\Sigma \pi_i p_{ij}'(t) = 0$ $\forall j, t \geq 0$.

Beweis: (a) $(1) \Rightarrow (2')$, falls $(\Sigma \;)' = \Sigma (\;)'$ (s. (b)), $(2') \Rightarrow (2)$ ist trivial $(t = 0)$, $(2) \Rightarrow (2')$ mit Rückwärts-Dgl. (s. (c)), $(2') \Rightarrow (1)$ ebenfalls mit (b) und Randbed. $t = 0$.

(b) $\left(\Sigma \pi_i p_{ij}(t)\right)' = \Sigma \pi_i p_{ij}'(t)$ folgt mit maj. Konv. bzw. Hinderer, 19.10, falls gilt:

(α) $\Sigma \pi_i p_{ij}(t) < \infty$ (folgt aus (3')), (β) $\pi_i p_{ij}(\cdot)$ ist in $\mathbb{R}_+$ diffbar, in 0 rechtsseitig (M.11).

(γ) $|\pi_i p_{ij}'(t)| \leq h(i)$ mit $\sum_i h(i) < \infty$: Mit $h(i) = \pi_i q_i$ nach (3) und wegen $|p_{ij}'(t)| \leq q_i$:

$$p_{ij}'(t) = \sum_k q_{ik} p_{kj}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t) - q_i p_{ij}(t) \leq \sum_{k \neq i} q_{ik} \cdot 1 - 0 \; / \; \geq 0 - q_i \cdot 1 .$$

(c) $\Sigma \pi_i p_{ij}'(t) = \sum_i \pi_i \sum_k q_{ik} p_{kj}(t) \overset{!}{=} \sum_k \sum_i \pi_i q_{ik} \, p_{kj}(t) \overset{(2)}{=} 0$ (Reihe ist abs. konv. nach u. (3)).

Bemerkung M.14: Zur Berechnung einer stat. Vert. wird (2) benutzt (s. u.).

Bemerkung M.15: Zur Interpretation von (3): Falls $0 < \Sigma \pi_i q_i < \infty$, ist $(\pi_j q_j / \Sigma \pi_i q_i)$ stationäre Verteilung der „eingebetteten" MK (Z_k) ($\widehat{=}$ rel. Häufigk. von j), s. M.14.

Anwendung auf Geburts- und Todesprozesse ($I = \mathbb{N}_0$, $I = \{0, 1, \ldots, N\}$ analog):

Lösung von (2): $j = 0$: $-\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 = 0$, $j \geq 1$: $\lambda_{j-1} \pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j) \pi_j + \mu_{j+1} \pi_{j+1} = 0$

$\Leftrightarrow -\lambda_j \pi_j + \mu_{j+1} \pi_{j+1} = -\lambda_{j-1} \pi_{j-1} + \mu_j \pi_j \overset{\text{(Ind.)}}{\Rightarrow} -\lambda_j \pi_j + \mu_{j+1} \pi_{j+1} = 0 \Leftrightarrow \pi_{j+1} = \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} \pi_j$,

also $\pi_j = \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \pi_0$, mit $\underline{\alpha_j} := \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}$, $\alpha_0 = 1$: $\underline{\pi_j = \alpha_j \pi_0}$

Fall 1: $\alpha := \Sigma_{j=0}^{\infty} \alpha_j = \infty \Leftrightarrow$ die einzige Lösung von (2) mit $\Sigma \pi_i < \infty$ ist $\pi_i \equiv 0$.

Fall 2: $\alpha := \Sigma_{j=0}^{\infty} \alpha_j < \infty \Leftrightarrow$ es existiert eine eind. best. Lösung $(\pi_i = \alpha_i / \alpha)$.
Falls noch (3) $\Sigma \alpha_j (\mu_j + \lambda_j) < \infty$ gilt, ist $(\pi_i = \alpha_i / \alpha)$ eind. best. stat. Verteilung.

Stochastische Prozesse I

Spezialfall A: $\alpha_j = \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\lambda k + a}{\mu(k+1)} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{\left(\frac{a}{\lambda}+j-1\right)_j}{j!}$ (vgl. $Nb(p,r;j) = \binom{r+j-1}{j} p^r (1-p)^j, j \in \mathbb{N}_0$)

Bei $\lambda < \mu$ ist $\sum_0^\infty \alpha_j = (1-\frac{\lambda}{\mu})^{-a/\lambda} < \infty$, (π_j) ist Nb-Verteilung, bei $a=\lambda$ geom. Verteilung.

Außerdem ist $\sum_0^\infty \alpha_j q_j = \sum_0^\infty \alpha_j((\lambda+\mu)j+a) = a\sum_0^\infty \alpha_j + (\lambda+\mu)\sum_0^\infty j\alpha_j < \infty$.

Bei $\lambda \geq \mu$ ist $\alpha_j \geq \frac{a}{\mu} \cdot \prod_{k=1}^{j-1} \frac{k}{k+1} = \frac{a}{\mu} \cdot \frac{1}{j}$ $(j \geq 1)$, also $\sum a_j = \infty$, $\sum j a_j = \infty$.

M.14 Satz: Die eingebettete MK (Z_k) einer konservativen HMKS mit $q_i > 0$ $(i \in I)$ besitzt eine stat. Verteilung (ϱ_i) genau dann, wenn (0') $\varrho_i \geq 0, \sum \varrho_i = 1$ und (4) $\sum_{i\in I} \varrho_i q_{ij}/q_i = 0$.
(ϱ_i) ist Lösung von (4) genau dann, wenn $\pi_i = \varrho_i/q_i$ Lösung von (2) ist.

Beweis: (ϱ_i) ist stat. Verteilung von (Z_k) genau dann, wenn (0') und $\varrho_j = \sum_{i\in I} \varrho_i r_{ij}$ gilt.

Lösung der Rückwärts-Differentialgleichung(en)

M.15 Satz: Es sei (q_{ij}) eine konservative Q-Matrix.
$p_{ij}(\cdot, n): \mathbb{R}_+ \to [0,1], n \in \mathbb{N}_0$ sei induktiv definiert durch

$(*_n)$ $p_{ij}(t,n) := \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{k\neq i} q_{ik} \int_0^t p_{kj}(t-\tau, n-1) e^{-q_i \tau} d\tau$, $n \in \mathbb{N}_0$

mit Anfang $p_{ij}(t,-1) \equiv 0$ bzw. $p_{ij}(t,0) = \delta_{ij} e^{-q_i t}$. Dann gilt:

(a) Es existiert $\tilde{p}_{ij}(t) := \lim_{n\to\infty} p_{ij}(t,n)$, $\tilde{p}_{ij}(\cdot)$ erfüllt „$(*_\infty)$" $(=(*_n)$ ohne $n)$.

(b) $(\tilde{p}_{ij}(\cdot))$ besitzt die Eigenschaften (A),(C),(D),(E) einer SÜMF und (B') $\sum_{j\in I} \tilde{p}_{ij}(t) \leq 1$ $\forall i,t$.

(c) $\tilde{p}_{ij}(\cdot)$ ist diff-bar und es gilt $\tilde{p}_{ij}'(0) = q_{ij}$, $i,j \in I$,

(d) $\tilde{p}_{ij}(\cdot)$ ist Lösung der Rückwärts-Dgl. $p_{ij}'(t) = \sum_{k\in I} p_{ik}'(0) p_{kj}(t)$, $i,j \in I$.

(e) Für jede Lösung $(z_{ij}(\cdot))$ mit $z_{ij}(\cdot) \geq 0$ gilt $z_{ij}(\cdot) \geq \tilde{p}_{ij}(\cdot)$.

Bemerkung M.16: $p_{ij}(t,n)$ ist die W, mit höchstens n Sprüngen in der Zeit t von i nach j zu gehen, τ ist die Zeit des 1. Sprungs, $q_i e^{-q_i t}$ ist Dichte der zugeh. Vert., q_{ik}/q_i ist die W, dabei nach k zu springen, $p_{kj}(t-\tau, n-1)$ ist die W, in der Restzeit $t-\tau$ in höchstens $n-1$ Sprüngen nach j zu gehen, $\delta_{ij} e^{-q_i t}$ ist die W, ohne Sprung in i zu bleiben. $(\tilde{p}_{ij}(\cdot))$ heißt Minimallösung, bei $\sum_j \tilde{p}_{ij}(t) = 1$ $\forall t$ eind. Lösung.

Beweis: a1) $p_{ij}(t,n)$ ist isoton in n und ≥ 0 (mit Induktion).

a2) $p_{ij}(t,n) \leq 1$, sogar $\sum_{j\in I} p_{ij}(t,n) \leq 1$ (ebenfalls mit Induktion und $\sum_{k\neq i} q_{ik} = q_i$).

a3) Wegen der Isotonie (in n) und der Beschränktheit ex. d. Limes, $(*_\infty)$ folgt mit mon. Konv.

b1) (A),(B'),(D) folgen direkt, (E) bzw. (E') mit $(*_\infty)$ und beschr. Konvergenz.

b2) Für (C) setzt man $\hat{p}_{ij}(t,n) := p_{ij}(t,n) - p_{ij}(t,n-1)$, $n \in \mathbb{N}_0$ $(\hat{p}_{ij}(t,n) \geq 0)$, und zeigt durch Induktion $\hat{p}_{ij}(s+t,n) = \sum_{m=0}^n \sum_{k\in I} \hat{p}_{ik}(s,m) \hat{p}_{kj}(t,n-m)$.

c) Falls (B) nicht gilt, ergänzt man I zu $\bar{I} := I + \{\Delta\}$, $(\tilde{p}_{ij}(\cdot))$ zu einer stochast. Matrix $(\tilde{\tilde{p}}_{ij}(\cdot), i,j \in \bar{I})$ mit $\tilde{\tilde{p}}_{i\Delta}(t) = 1 - \sum_{j\in I} \tilde{p}_{ij}(t)$, $\tilde{\tilde{p}}_{\Delta i}(t) \equiv 0, i \in I$, $\tilde{\tilde{p}}_{\Delta\Delta}(t) \equiv 1$, $\tilde{\tilde{p}}_{ij}(t) = \tilde{p}_{ij}(t)$ sonst.
$(\tilde{\tilde{p}}_{ij}(\cdot))$ ist SÜMF: (A),(B),(D),(E') klar, (C): $\tilde{\tilde{p}}_{i\Delta}(s+t) = 1 - \sum_{j\in I} \tilde{p}_{ij}(s+t) = \sum_{k\in I} \tilde{p}_{ik}(s)\left[1 - \sum_{j\in I} \tilde{p}_{kj}(t)\right] + \tilde{\tilde{p}}_{i\Delta}(s) \cdot 1$.
Also ist nach 5.10 $\tilde{\tilde{p}}_{ij}(\cdot) = \tilde{p}_{ij}(\cdot)$ diffbar $\forall i,j \in I$, u. es gilt $\tilde{p}_{ij}'(0) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(\tilde{p}_{ij}(t) - \tilde{p}_{ij}(0)) =$
$= \lim_{t\downarrow 0} \delta_{ij} \frac{1}{t}(e^{-q_i t} - 1) + \lim_{t\downarrow 0} \sum_{k\neq i} q_{ik} \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{p}_{kj}(t-\tau) e^{-q_i \tau} d\tau = \delta_{ij} q_{ii} + \sum_{k\neq i} q_{ik} \delta_{kj} = q_{ij}$, $i,j \in I$.

d) $(\tilde{\tilde{p}}_{ij}'(0))$ ist konservativ, da $q_i = \sum_{j\neq i,\Delta} \tilde{p}_{ij}'(0) \leq \sum_{j\neq i} \tilde{\tilde{p}}_{ij}'(0) \leq -\tilde{\tilde{p}}_{ii}'(0) = q_i$, also $\tilde{\tilde{p}}_{i\Delta}'(0) = 0$.
Nach 5.11 gilt die Rückwärts-Dgl. für $(\tilde{\tilde{p}}_{ij}(\cdot))$, also auch für $(\tilde{p}_{ij}(\cdot))$ $(\tilde{\tilde{p}}_{\Delta j}(t) = 0, j \in I)$.

e) Für $(z_{ij}(\cdot))$ gilt $(*_\infty)$ (ableiten!) und $z_{ij}(t) \geq 0 = p_{ij}(t,-1)$. Durch Induktion folgt (e).

Das Wartesystem $M/M/1/\infty$ „im Gleichgewicht"

(1) Das System $M/M/1/\infty$ (1 Bediener, Warteraum ∞, Eingang $PP(\lambda)$, Bedienrate μ) hat die <u>stationäre Verteilung</u> $\left(\pi_j = \frac{\mu-\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j, j \geq 0\right) \sim \text{geom}^0\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)$.
Der Prozess $\underline{(X_t^{st})}$ besitze die Startverteilung $(\pi_j) \Rightarrow (X_t^{st})$ ist <u>stationär.</u>

(2) Die <u>Abgangsrate ν</u> von (X_t^{st}): $\underline{\nu} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} P(1 \text{ Abgang in } (t, t+h]) =$
$= \lim \frac{1}{h}\left[P(X_t^{st}=0)\cdot o(h) + P(X_t^{st}>0)(\mu \cdot h + o(h))\right] = P(X_t^{st}>0)\cdot\mu = (1-\pi_0)\cdot\mu = \frac{\lambda}{\mu}\cdot\mu = \underline{\lambda}.$
Der Abgangsprozess von (X_t^{st}) ist $PP(\lambda)$ (Beweis mit (4), s.u.)
Auf Dauer müssen gleichviel abgehen wie ankommen.

(3) <u>Fortsetzung auf $T=\mathbb{R}$</u>: (X_t^{st}) läßt sich auf $T=\mathbb{R}$ fortsetzen, da der Startzeitpunkt beliebig ist (stationär!), auch für endl.-dim. Randverteilungen.
Der Zugangs-(und Abgangs)prozess ist dann jeweils ein Poisson-Prozess auf $\mathbb{R}$.

(4) Der Prozess $(\bar{X}_t) := (X_{-t}^{st})$ auf $T=\mathbb{R}$: „<u>Zeitumkehrung</u>". Beh.: $(\bar{X}_t) \sim (X_t^{st})$.
Für die Zeitumkehrung $(\bar{X}_t)$ einer bel. stationären(!) HMKS gilt
$\bar{\pi}_j = \pi_j$ und $\bar{\pi}_i \bar{q}_{ij} = \pi_j q_{ji}$ (gleicher „W-Fluss"); hier $\bar{q}_{ij} = q_{ij}$ (wg. $\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}$), $\Rightarrow$ Beh.
Sei $i \neq j$: $\bar{\pi}_i \bar{q}_{ij} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} P(\bar{X}_t = i, \bar{X}_{t+h} = j) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} P(X_{-t-h}^{st} = j, X_{-t}^{st} = i) = \pi_j q_{ji}$.

(5) Welche <u>Verteilung</u> von $(X_\cdot^{st})$ findet ein Kunde unmittelbar <u>vor</u> seiner <u>Ankunft</u> vor? Ebenfalls (π_j) wie bei einem festen Zeitpkt?
$$P(X_t = j \mid X_{t+h} = X_t + 1) = \frac{P(X_t = j, X_{t+h} = j+1)}{\sum_k P(X_t = k, X_{t+h} = k+1)} \to \frac{\pi_j q_{j,j+1}}{\sum_k \pi_k q_{k,k+1}} = \frac{\pi_j \cdot \lambda}{\sum_k \pi_k \cdot \lambda} = \pi_j.$$
<u>Aber</u>: Der erste Kunde nach einem festen Zeitpunkt t_0 findet den Prozess <u>nicht</u> im Gleichgewicht vor (vgl. „beobachtete Lebensdauer").

(6) Die <u>Durchlaufzeit</u> eines Kunden hat bei FIFO die Verteilung $Exp(\mu-\lambda)$ (s. Übg.)

(7) <u>Andere Bedienungszeit-Verteilungen</u>: $Exp(\mu)$ kann unrealistisch sein.
Bei <u>$\Gamma_{n,\mu}$-Vert.</u> durchläuft der Kunde n Bedienungen mit $exp(\mu)$-Verteilung.
Man braucht einen Zählindex (= „<u>Phase</u>"), zusätzl. zur Kunden-Anzahl.
Also etwa $I = \mathbb{N} \times \{0, \dots, n-1\} \cup \{(0,0)\}$, $(i,k) \hat{=}$ (Anz. Kd., restl. Bedienungen),
z.B. für $i \geq 1, k \geq 1$ $q_{(i,k),(i+1,k)} = \lambda$, $q_{(i,k),(i,k-1)} = \mu$, $q_{(0,0),(1,n-1)} = \lambda$, $q_{(i,0),(i-1,n-1)} = \mu$.
Bei <u>Mischungen von Γ-Vert.</u> $\sum_{m=1}^{M} p_m \Gamma_{n_m,\mu_m}$ erhält jeder Kd. einen „Typ" m mit W. p_m.
Der Gesamt-Prozess ist eine Überlagerung von Typ-m-Prozessen (vgl. Satz 2.8)

(8) <u>2 gekoppelte Wartesysteme</u>  Zustände $I = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$,
Gesamtprozess (X_t, Y_t). Ist (X_t, Y_t) stationär, dann auch X_t und Y_t.
(Der Eingangsprozess bei (Y_t) ist nach (2) ein PP.) Stat. Vert. ist Produkt-Vert. (!)

(9) Weitere Stichworte: Kd. Typ, Route i. Netzwerk v. Wartesyst., Abfertigung FIFO/LIFO u.a.