Stochastische Prozesse I (Kurzskript)

M. Markov-Ketten mit stetiger Zeit

Literatur: exakt: K.L. Chung, einführend: Çinlar, Kohlas, ...

Motivation: Bisher war Unabh. + Stationarität der Zuwächse wesentlich, dies ist aber nicht erfüllt bei Wachstumsprozessen, Warteschlangen, der weitere Verlauf (Zuwachs) hängt vom gegenwärtigen Zustand ab, es soll also die Markov-Eigenschaft gelten.

Wir beschränken uns vorerst auf Prozesse mit abzählbarem Zustandsraum.

Definition: Ein Markov-Prozeß $(X_t : \Omega \to I, t \in \mathbb{R}_+)$ mit I abzählb. [und minimal, d.h. für alle $i \in I$ ex. $t \in \mathbb{R}_+$ mit $P(X_t = i) > 0$] heißt Markov-Kette mit stetiger Zeit.
(Markov-Eigensch. $\Leftrightarrow P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n) = P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n)$, falls $P(X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n) > 0$)
Eine Markov-Kette mit stetiger Zeit heißt homogen, falls für alle i, j, s, t $P(X_{s+t} = j | X_s = i)$ unabhängig von s ist, sofern $P(X_s = i) > 0$. In diesem Fall heißt $t \to p_{ij}(t) := P(X_{s+t} = j | X_s = i)$ (mit geeign. s) Übergangs-Funktion von i nach j und $\mathbf{p}(\cdot) := (p_{ij}(\cdot), i, j \in I)$ Übergangs-Matrix-Funktion (ÜMF).

M.1 Folgerung: Für eine homogene Markov-Kette mit stetiger Zeit (HMKS), mit ÜMF $\mathbf{p}$ und Startverteilung $(p_i(0) := P(X_0 = i), i \in I)$ gilt

(a) $p_j(t) := P(X_t = j) = \sum_{i \in I} p_i(0) p_{ij}(t)$

(b) $P(X_{t_0} = i_0, \ldots, X_{t_n} = i_n) = p_{i_0}(t_0) p_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) \cdots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$.

(c) $p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in I} p_{ik}(s) p_{kj}(t)$, kurz $\mathbf{p}(s+t) = \mathbf{p}(s)\mathbf{p}(t)$, die Gl. von CHAPMAN-KOLMOGOROV.

Umkehrproblem: Wann gibt es zu $\mathbf{p}(\cdot)$ eine hom. Markov-Kette (X_t)?

M.2 Satz: Gegeben sei eine Matrix von Abb. $(p_{ij}(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, i, j \in I)$, I abzählbar, mit

(A) $p_{ij}(t) \geq 0 \quad \forall t > 0$,

(B) $\sum_j p_{ij}(t) = 1 \quad \forall t > 0$,

(C) $p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in I} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \quad \forall s, t > 0$,

und eine Startverteilung (Z-Dichte) $(p_i(0), i \in I)$. Dann gibt es eine hom. Markov-Kette m. st. Zeit mit ÜMF $(p_{ij}(\cdot))$ und Startverteilung $(p_i(0))$.

Beweis: Man konstruiert endl.-dim. Verteilungen und benutzt d. Satz v. Kolmogorov.

Bemerkung M.1: Eine HMKS besitzt nicht notw. r.s. stetige Pfade, auch nicht f.s..

Beispiel M.1: Ein zus. ges. Poisson-Prozeß mit diskr. Sprunghöhen-Vert. ist eine HMKS.

Beispiel M.2: Ist (X_t) ein Poisson-Prozeß und (Y_n) eine davon unabh. homogene Markov-Kette mit diskreter Zeit, so ist $(Z_t := Y_{X_t})$ eine HMKS.

Beispiel M.3: Die Länge einer Warteschlange vor einem Schalter mit exponentieller Bedienungszeit bei Poisson-Ankunftsprozeß und beschränktem oder unbeschränktem Warteraum ist eine HMKS.

Stochastische Prozesse I (Kurzskript)

Konstruktion einer (typischen) homogenen MK mit stetiger Zeit:

Motivation: Da I abzählbar, muß (X_t) i.wes. ein Sprungprozeß sein.
Wegen der Markov-Eigenschaft müssen die Zwischenzeiten expon.-verteilt sein (gedächtnislos!), der Parameter darf nur vom gegenwärtigen Zustand abhängen. Ebenso darf die Verteilung des nächsten Sprungziels nur vom gegenw. Zust. abh.

M.3 Satz: Sei I eine abz. Menge, $(p_i(0))$ eine Z-Dichte auf I, $(r_{ij},\ i,j\in I)$ eine stoch. Matrix und $q_i \geq 0$, $i\in I$. Dann gibt es einen Markov-Prozeß $((T_n, Z_n), n\in\mathbb{N}_0)$ (genannt „Markov-Erneuerungs-Prozeß") mit $T_0=0$, $P(Z_0=i)=p_i(0)$, $P^{T_{n+1}|T_n, Z_n=i} = \exp(q_i)$ und $P(Z_{n+1}=j \mid T_n, Z_n=i, T_{n+1}) = r_{ij}$. Ist $S_n := \sum_{\ell=1}^{n} T_\ell$, N_t der zugeh. Zählprozeß, so ist $X_t := Z_{N_t}$ eine HMKS mit Startvert. $(p_i(0))$, $\exp(q_i)$-Verweildauern und Ü-Matrix (r_{ij}).

Beweis: Der Prozeß $((T_n, Z_n))$ wird kanonisch konstruiert mit dem Satz von IONESCU-TULCEA: $P(T_{n+1}>t, Z_{n+1}=j \mid T_n=s, Z_n=i) = e^{-q_i t} r_{ij}$. Für die ME und Homogenität von (X_t) benutzt man (wie bei Satz PP2) die Gedächtnislosigkeit der Expon.-Verteilung: Ist $s>0$, $N_s=n$, $R_s := s-S_n$, $T_0' := 0$, $Z_0' = X_s = Z_n$, $T_1' := T_{n+1}-R_s$, $Z_k' := Z_{n+k}$, $T_k' := T_{n+k}$ sonst, so ist der Prozeß $((T_k', Z_k'), k\in\mathbb{N}_0)$ unter $X_s=i$ unabhängig von $(X_u, 0\leq u<s)$ und besitzt dieselbe Verteilung wie $((T_k, Z_k))$ unter $X_0=i$.
Daraus folgt $P((X_{t_0},\dots,X_{t_{n-1}})\in B, X_s=i, X_{t+s}=j) = P((X_{t_0},\dots,X_{t_{n-1}})\in B, X_s=i)\,P(X_t'=j \mid X_0'=i)$, ...

Bemerkung M.2: Es ist nicht ausgeschlossen, daß (S_n) einen Häufungspunkt S_∞ besitzt. In diesem Fall ist $N_t=\infty$ für alle $t\geq S_\infty$ und man setzt $Z_\infty := \Delta$ (oder = „∞"), $\Delta\notin I$. Kriterien für $N_t<\infty$ P-f.s. werden wir später betrachten.

Bemerkung M.3: Man muß i.allg. $q_i=0$ zulassen mit $\exp(0)=\varepsilon_\infty$. Der Zust. i ist dann „absorbierend". Es kommt dann $T_n=\infty$ und $S_n=\infty$ vor, N_t ist dann beschränkt.

Bemerkung M.4: Es gibt Beispiele von HMKS mit „instabilen" Zuständen, was $q_i=\infty$ und und damit $\exp(q_i)=\varepsilon_0$, entspricht. Aber für die Anwendung ist dies unrealistisch.

Bemerkung M.5: Für die stoch. Matrix (r_{ij}) wird meist $r_{ii}=0$ gefordert, damit nur echte Sprünge auftreten (f.s.). Man kann dies erreichen durch $q_i' := q_i(1-r_{ii})$, $r_{ii}'=0$, $r_{ij}' = \frac{r_{ij}}{1-r_{ii}}$ $(i\neq j)$.

Bemerkung M.6: Man kann auch allgemeinere Markov-Erneuerungs-Prozesse definieren: (T_n, Z_n) Markovsch, (T_{n+1}, Z_{n+1}) nur abh. von Z_n. Dann heißt X_t „Semi-Markov-Prozeß". $(T_n>0)$

Zur Frage der Umkehrung von Satz M.3 zeigen wir als vorläufiges Ergebnis:

M.4 Satz: Ist (X_t) nach Satz 5.3 aus $(p_i(0)), (r_{ij}), (q_i)$ konstruiert, $p_{ij}(\cdot)$ die zug. ÜMF, so existiert $q_{ij} := p_{ij}'(0)$ für alle $i,j\in I$ und es gilt $q_{ij} = \begin{cases} r_{ij}\,q_i & \text{für } i\neq j \\ -q_i & \text{für } i=j \end{cases}$ $(r_{ii}=0\,!)$.

Beweis: a) $\frac{1}{h}P(T_1\leq h \mid X_0=i) = \frac{1}{h}(1-e^{-q_i h}) \to q_i<\infty$ $(h\to 0)$

b) $\delta_j(h) := \frac{1}{h}P(T_1\leq h, S_2\leq h, X_h=j \mid X_0=i) \xrightarrow{\text{z.z.}} 0$ $(h\to 0)$: $\delta_j(h) \leq \frac{1}{h}P(T_1\leq h, T_2\leq h \mid X_0=i) = \dots$

$\dots = \sum_{\ell\in I} \frac{1}{h}P(T_1\leq h, T_2\leq h \mid X_0=i, Z_1=\ell)\,P(Z_1=\ell \mid X_0=i) = \sum_\ell \frac{1}{h}(1-e^{-q_i h})(1-e^{-q_\ell h})\,r_{i\ell} \to \text{„}q_i \cdot \sum_\ell 0\cdot r_{i\ell}\text{"} = 0$.

c) $(i=j)$: $\frac{1}{h}[p_{ii}(0)-p_{ii}(h)] = \frac{1}{h}[1-P(X_h=i \mid X_0=i)] = \frac{1}{h}[1-P(T_1>h \mid X_0=i)] - \delta_i(h) \to q_i$ $(h\to 0)$.

d) $(i\neq j)$: $\frac{1}{h}[p_{ij}(h)-p_{ij}(0)] = \frac{1}{h}P(X_h=j \mid X_0=i) = \frac{1}{h}P(T_1\leq h, S_2>h, Z_1=j \mid X_0=i) + \frac{1}{h}P(T_1\leq h, S_2\leq h, X_h=j \mid X_0=i) =$

$= \frac{1}{h}P(T_1\leq h, Z_1=j \mid X_0=i) - \frac{1}{h}P(T_1\leq h, T_2\leq h-T_1, Z_1=j \mid X_0=i) + \delta_j(h) \to q_i r_{ij} - 0 + 0 = q_i r_{ij}$ $(h\to 0)$.

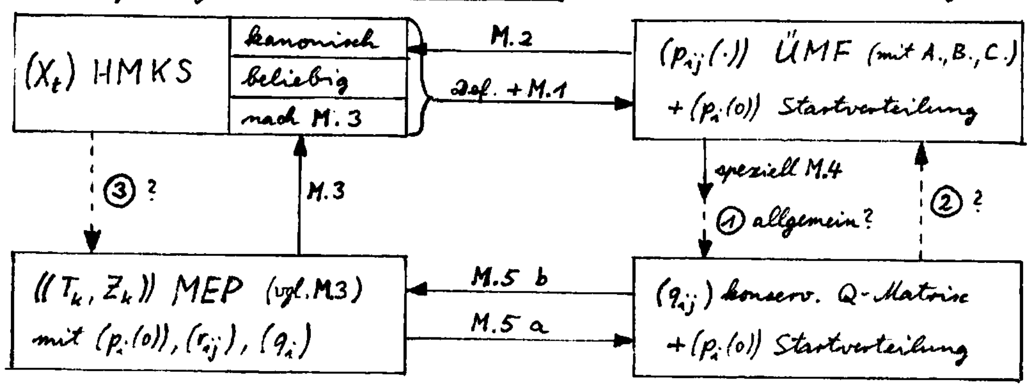
Stochastische Prozesse (Kurzskript)

Definition: Eine $I \times I$ Matrix (q_{ij}) heißt [konservative] Q-Matrix (Ü-Raten-Matrix, Generator), falls $q_{ij} \ge 0$ für $i \ne j$ und $\sum_{j \ne i} q_{ij} \underset{[=]}{\le} -q_{ii} < \infty$.
Eine HMKS heißt konservativ, falls $p_{ij}'(0)$ existiert und konserv. Q-Matrix ist.

M.5 Folgerung: (a) Es sei $q_i \ge 0$, $i \in I$, (r_{ij}) stoch. Matrix mit $r_{ii} \begin{smallmatrix}=0\\=1\end{smallmatrix}$ für $q_i \begin{smallmatrix}>0\\=0\end{smallmatrix}$. Dann ist die mit (T_k, Z_k) konstruierte HMKS konservativ mit Q-Matrix $(q_{ij} = r_{ij} q_i \ (i \ne j) / = -q_i \ (i = j))$.
(b) Ist (q_{ij}) konservative Q-Matrix, so ist $q_i := -q_{ii} \ge 0$ und $(r_{ij} := (1-\delta_{ij}) \frac{q_{ij}}{-q_{ii}} \ (q_{ii} \ne 0) / r_{ii} := 1 \ (q_{ii} = 0))$ eine stochastische Matrix mit $r_{ii} \begin{smallmatrix}=0\\=1\end{smallmatrix}$ für $q_i \begin{smallmatrix}>0\\=0\end{smallmatrix}$. Zusammen mit einer Startverteilung $(p_i(0))$ existiert dann eine HMKS mit $p_{ij}'(0) = q_{ij}$.

Bemerkung M.7: Eine nicht-konservative Q-Matrix kann durch Hinzunahme eines fiktiven absorbierenden Zustandes Δ konservativ gemacht werden.

Darstellungsmöglichkeiten von HMKS und ihre Zusammenhänge:



Zu ① Es muß i. wes. Differenzierbarkeit gezeigt werden (dann $q_{ij} := p_{ij}'(0)$) und $q_i < \infty$).
Zu ② Es sind gewisse Diff.-gleichungssysteme zu lösen (s. Sätze M.11 u. M.15).
Zu ③ Über Strukturaussagen bzgl. Wartezeiten und Zustandsprozess (oder über $(p_{ij}(\cdot)), (q_{ij})$).

Zur Häufung von Sprungstellen im Endlichen:

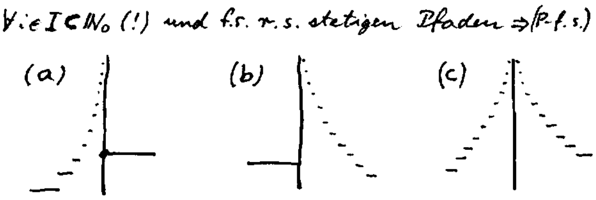
M.6 Satz: Ist (q_{ij}) eine konservative Q-Matrix ($q_i := -q_{ii}$) und $((T_k, Z_k))$ der zugehörige Markov-Erneuerungsprozeß, $S_\infty := \sum_{k=1}^{\infty} T_k$, dann gilt für fast alle $\omega \in \Omega$:
$$S_\infty(\omega) = \infty \quad \text{genau dann, wenn} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q_{Z_k(\omega)}^{-1} \left(= E(S_\infty | (Z_k)) \right) = \infty \qquad (0^{-1} := \infty).$$

Beweis (s. Chung II, 19.1): Man stutzt die T_k ($T_k' := \min(T_k, 1)$) und benutzt einen Martingalsatz.
Bemerkung M.8: S_∞ ist die Summe der tatsächlichen Verweilzeiten, $\sum q_{Z_k(\omega)}^{-1}$ die Summe der bed. erwarteten Verweilzeiten $E(T_{k+1} | Z_k)$ (es ist $E(T_{k+1} | Z_k = i) = q_i^{-1}$).

M.7 Folgerung: (a) Für $P(S_\infty = \infty | X_0 = i) = 1$ ist hinreichend, daß $(q_i, i \in I)$ beschränkt ist.
(b) Für $P(S_\infty < \infty | X_0 = i) = 1$ ist hinreichend, daß $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j \in I} r_{ij}^{(k)} q_j^{-1} < \infty$.

Beweis. (a) Aus $q_i \le K$ folgt $q_i^{-1} \ge \frac{1}{K}$, also $\sum_{k=0}^{\infty} q_{Z_k(\omega)}^{-1} = \infty$ für alle $\omega \in \Omega$.
(b) Es gilt $E(\sum_{k=0}^{\infty} q_{Z_k}^{-1} | Z_0 = i) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j \in I} P(Z_k = j | Z_0 = i) \, q_j^{-1}$. Aus $E(V | Z_0 = i) < \infty$ folgt $V < \infty$ f.s. auf $\{Z_0 = i\}$, also $S_\infty < \infty$ f.s. auf $\{Z_0 = i\}$ und damit $P(S_\infty < \infty | X_0 = i) = 1$.

M.8 Satz: (X_t) HMKS mit SÜMF (s.u.), $q_i < \infty \ \forall i \in I \subset \mathbb{N}_0$ (!) und f.s. r.s. stetigen Pfaden $\Rightarrow$ (P-f.s.)
Ist t Häufungspkt. von Sprungstellen, so gilt
(a) $X_{t-}(\omega) = \infty$, $X_t(\omega) \in I$ („Sprung aus ∞")
oder (b) $X_{t-}(\omega) \in I$, $X_t(\omega) = \infty$ („Sprung nach ∞")
oder (c) $X_{t-}(\omega) = X_t(\omega) = \infty$ („stetig in ∞")



Stochastische Prozesse (Kurzskript)

Zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit der ÜMF

M.9 Satz: Es sei (X_t) eine HMKS mit ÜMF $(p_{ij}(\cdot))$. Dann sind äquivalent:

(a) $p_{ij}(\cdot)$ stetig in $(0,\infty)$ für alle $i,j \in I$

(b) $p_{ij}(\cdot)$ gleichmäßig stetig in $[\delta,\infty)$ für alle $\delta > 0$, $i,j \in I$

(c) $\lim_{t\to 0} p_{ij}(t)$ existiert für alle $i,j \in I$

(D) $p_{ij}(\cdot)$ ist meßbar für alle $i,j \in I$.

Der Beweis ist sehr technisch, er beruht i. Wes. auf CH-K, s.M.2(C).

Beweisidee: (b) $\Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (D) ist trivial. Wir zeigen (a) $\Rightarrow$ (C) $\Rightarrow$ (D) $\Rightarrow$ (b):

(a) $\Rightarrow$ (c) (Chung II, 1.3): $\exists\, t_n \downarrow 0,\ t'_m \downarrow 0$ mit $p_{ij}(t_n) \to u_{ij}$, $p_{ij}(t'_m) \to u'_{ij}$ $\forall_{ij}$ (!)

$\Rightarrow p_{ij}(t'_m) = \lim_n p_{ij}(t'_m + t_n) = \lim_n \sum_k p_{ik}(t'_m) p_{kj}(t_n) \overset{mK}{=} \sum_k p_{ik}(t'_m) u_{kj}$ (✱), $\Rightarrow (t'_m \downarrow 0)$ $u'_{ij} \overset{LvF}{\geq} \sum_k u'_{ik} u_{kj}$,

ebenso: $p_{ij}(t) = \lim \sum p_{ik}(t'_n) p_{kj}(t) \overset{LvF}{\geq} \sum_k u'_{ik} p_{kj}(t)$, $t = t_n \downarrow 0$: $u_{ij} \geq \sum_k u'_{ik} u_{kj}$.

Wegen Σ_j (✱): $1 = \sum_k p_{ik}(t) \sum_j u_{kj}$ folgt aus $\Sigma_j u_{kj} < 1$ auch $p_{ik}(t) \equiv 0$, also $u'_{ik} = 0$ ($\Sigma_j u_{kj} \leq 1$!).

Also $\sum_j u'_{ij} \geq \sum_k u'_{ik} \Sigma_j u_{kj} = \Sigma_k u'_{ik} \Rightarrow u'_{ij} = \Sigma_k u'_{ik} u_{kj} \leq u_{ij}$ und umgekehrt.

(c) $\Rightarrow$ (D) Nach (✱) und (c) ex. der rechtsseitige Limes, also ist $p_{ij}(\cdot)$ meßbar.

(D) $\Rightarrow$ (b) Man zeigt, daß $\Sigma_j |p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)|$ antiton in t ist und mit $h \downarrow 0$ glm. in $t\,(\geq \delta)$ gegen 0 geht:

$\Sigma_j |p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| = \Sigma_j |\Sigma_k [p_{ik}(s+h) - p_{ik}(s)] p_{kj}(t-s)| \leq \sum_k |p_{ik}(s+h) - p_{ik}(s)| \Sigma_j p_{kj}(t-s) = \sum_k |p_{ik}(s+h) - p_{ik}(s)|$.

Für $0 < \delta \leq t$, $0 \leq h \leq \delta$ folgt $\Sigma_j |p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \leq \sum_k \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |p_{ik}(s+h) - p_{ik}(s)|\,ds$ mit $\int_0^\delta \ldots \leq 2\int_0^{2\delta} p_{ik}(s)\,ds$, $\int_0^\delta \ldots \to 0\ (h \to 0)$ (!)*

Bemerkung M.9: Mit M.9(c) gilt nicht notw. $p_{ij}(t) \to p_{ij}(0) = \delta_{ij}\ (t \to 0)$! Möglich ist auch $p_{ij}(t) \to u_j$ mit $\Sigma u_j = 1$ oder „Mischfälle". Für die Anwendung ist dies aber uninteressant.

Definition: Eine ÜMF $(p_{ij}(\cdot))$ heißt Standard-ÜMF (SÜMF), wenn (E) $\lim_{t\to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$ für alle i,j.

Bemerkung M.10: (a) Aus (E) folgt (D) nach M.9. (b) Aus (E') $\lim_{t\to 0} p_{ii}(t) = 1$ $\forall_i$ folgt (E) $[i \neq j: p_{ij}(t) \leq 1 - p_{ii}(t) \to 0]$.

M.10 Satz: Sei $(p_{ij}(\cdot))$ eine SÜMF, dann gilt:

(a) Es existiert $q_i := -q_{ii} := -p'_{ii}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(1 - p_{ii}(t))$ mit $q_i \leq \infty$ (!) für alle $i \in I$.

(b) Es existiert $q_{ij} := p'_{ij}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} p_{ij}(t)$ mit $q_{ij} < \infty$ für alle $i,j \in I$, $i \neq j$.

(c) Es gilt $\sum_{j\neq i} p'_{ij}(0) \leq -p'_{ii}(0) \leq \infty$, für endliches I $\sum_{j \neq i} p'_{ij}(0) = -p'_{ii}(0) < \infty$.

Beweis: (Chung II, 2.4-2.6) (a) mit $p_{ii}(t+s) \geq p_{ii}(t) p_{ii}(s)$, (b) mit Diskretisierung, (c) mit Lemma v. Fatou.

Definition: (a) Eine SÜMF $(p_{ij}(\cdot))$ heißt konservativ, wenn $(p'_{ij}(0))$ eine konservative Q-Matrix ist.

(b) Eine HMKS heißt konservative Standard-HMKS, wenn $(p_{ij}(\cdot))$ eine konservative SÜMF ist.

M.11 Satz: Sei (X_t) konservative Standard-HMKS. Dann ist $p_{ij}(\cdot)$ für alle $i,j \in I$ differenzierbar und $p'(\cdot) := (p'_{ij}(\cdot))$ genügt der (Kolmogorovschen) Rückwärts-Differentialgleichung

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in I} p'_{ik}(0) p_{kj}(t) \quad i,j \in I \qquad (\text{kurz } p'(t) = p'(0)\,p(t)) .$$

Beweis: $\frac{1}{h}(p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)) = \sum_{k\neq i} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) + \frac{p_{ii}(h)-1}{h} p_{ij}(t)$, entspr. für $\frac{1}{h}(p_{ij}(t) - p_{ij}(t-h))$.

Wenn $\Sigma_{k\neq i}$ und $h \downarrow 0$ vertauschbar, dann folgt Beh. [„$\geq$" mit Fatou, „$\leq$" mit Stutzung von I].

Bemerkung M.11: (a) Für „$p_{ij}(\cdot)$ diffbar" reicht $q_i < \infty$ oder $q_j < \infty$ (und $(p_{ij}(\cdot))$ SÜMF) (Chung II, 3.1+3.2),

(b) Für die Rückwärts-Dgl. ist (unter $q_i < \infty$) die Voraus. „konservativ" notwendig (Chung II, 17.2).

(c) Die Rückwärts-Dgl. gilt genau dann, wenn für fast alle Pfade mit $X_0(\omega) = i$, $X_t(\omega) = j$ die erste Unstetigkeit (wenn überhaupt) kein „Sprung nach Δ" ist (sondern ein Sprung nach $k \in I$) (Ch. II, 17.4).

(d) Die „Vorwärts-Dgl." $p'_{ij}(t) = \sum_{k\in I} p_{ik}(t) p'_{kj}(0)$ gilt genau dann, wenn für fast alle Pfade mit $X_0(\omega) = i$, $X_t(\omega) = j$ die letzte Unstetigkeit vor t (wenn überhaupt) kein „Sprung aus Δ" ist (Chung II, 17.4).

(* s.z.B.: Titchmarsh, The Theory of Functions S. 377.)