6 B. Grenzwerte und stationäre Verteilungen

Wann existieren stationäre Verteilungen? Wann sind sie eindeutig? Gibt es eine „Struktur“?
Wir beschränken uns zunächst auf **irreduzible** HMK, d.h. I ist einzige Klasse (und abgeschlossen).

6.5 Satz. Sei (X_n) irred.: **(a)** (X_n) transient oder null-rek. $\Rightarrow$ es gibt keine stat. Verteilung.
(b) Ist (X_n) positiv-rekurrent, so ist $(\pi_i := \frac{1}{m_{ii}}, i \in I)$ die einzige stationäre Verteilung.

Beweis. (1) Wir zeigen: Für *jede* stationäre Verteilung (μ_i) gilt $\mu_i = \pi_i := \frac{1}{m_{ii}}$.
Daraus folgt dann (a) (weil $(\pi_i) \equiv 0$ *keine* stat. Vert. ist) und die Eindeutigkeit in (b).
Sei also (μ_i) eine stat. Verteilung und $P(X_0 = i) = \mu_i$. Dann gilt $\mu_j = P(X_n = j) = \sum_{i \in I} \mu_i \, p_{ij}^{(n)}$.
Für (a) folgt mit 6.3 (c) $p_{ij}^{(n)} \to 0$ u. mit maj. Konv. $\mu_j = 0$ $(\forall j)$, (μ_i) ist also keine stat. Vert..
Für (b) reicht 6.3 nicht, man muss 6.4 (a) anwenden, also das César0-Mittel bilden.
Dann folgt $\mu_j \to \sum_{i \in I} \mu_i \, f_{ij}^* \frac{1}{m_{jj}}$ $(*)$, also mit 4.6 (b) – $f_{ij}^* = 1$ $\forall i, j$ – $\mu_j = \frac{1}{m_{jj}}$.
(2) Für (b) muss man noch zeigen, dass $(\pi_i) = (\frac{1}{m_{ii}})$ eine stat. Vert. ist, also dass (G) und (N) gilt.
Statt (N) reicht $0 < \sum_{i \in I} \frac{1}{m_{ii}} < \infty$. Denn dann ist $(\frac{c}{m_{ii}})$ eine stat. Vert. und mit (1) folgt $c = 1$.
Im positiv-rekurrenten Fall ist jedenfalls $\frac{1}{m_{ii}} > 0$ und aus $\sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$ folgt (bei $d_j = 1$) mit 6.3 (b) und L.v.Fatou $\sum_{i \in I} \frac{1}{m_{ii}} \le 1$. Aus $p_{ii}^{(n)} = \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n-1)} p_{ji}$ folgt ebenso $\frac{1}{m_{ii}} \ge \sum_{j \in I} \frac{1}{m_{jj}} p_{ji}$,
bei $d_j \ne 1$ mit César0-Limes. Durch Summation über i folgt Wid. zu „$>$“, also „$=$“, $\Rightarrow$ (G).

6.6 Satz. X sei eine **beliebige** HMK. Dann gilt:
(a) Es existiert eine stationäre Verteilung $\iff$ es existiert eine positiv-rekurrente Klasse.
(b) Ist $\{K_r, r \in J\}$ die Menge der positiv-rek. Klassen und $(\alpha_r, r \in J)$ eine Zähl-Dichte auf J, so ist $\mu_i := \sum_{r \in J} \alpha_r \frac{1}{m_{ii}} 1_{K_r}(i)$ eine stat. Vert., und jede stat. Vert. hat diese Struktur.

Beweis. (a) folgt aus (b): „$\Leftarrow$“: klar, „$\Rightarrow$“: wenn Zähl-Dichte auf J ex., dann $J \ne \emptyset$.
(b1) Ist (μ_i) stat. Vert., dann gilt $\mu_j \to \sum_{i \in I} \mu_i \, f_{ij}^* \frac{1}{m_{jj}}$ (s. $(*)$ im Beweisteil (1) zu 4.6),
Für $j \notin \bigcup K_r$ gilt $\mu_j = 0$. Sei $\alpha_r := \sum_{i \in K_r} \mu_i$, dann folgt $\sum_{r \in J} \alpha_r = 1$.
Ist $i \in K_r$, $j \in K_{r'}$, dann ist $f_{ij}^* = \delta_{rr'}$, also für $K(j) = K_r$ $\mu_j = \sum_{i \in K_{r'}} \mu_i \frac{1}{m_{jj}} = \frac{\alpha_{r'}}{m_{jj}}$.
(b2) Auf K_r existiert eine stationäre Verteilung $(\pi_i = \frac{1}{m_{ii}})$, also $\pi_j = \sum_{i \in K(j)} \pi_i \, p_{ij}$.
Sei $\sum_{r \in J} \alpha_r = 1$, $\alpha_i := \alpha_r$ für $i \in K_r$, $= 0$ sonst. Z.z. $\alpha_j \pi_j = \sum_{i \in I} \alpha_i \, \pi_i \, p_{ij}$:
Für $j \notin \bigcup K_r$ oder $i \notin K(j)$ ist $p_{ij} = 0$, also r.S. $= \sum_{i \in K(j)} \alpha_i \, \pi_i \, p_{ij} = \alpha_j \, \pi_j$.

6.7 Beispiel Warteschlange, (s. 4 C. Bsp. 3 u. 5.7): Existenz von stationären Verteilungen:

Übersicht:	$\alpha_n := \Pi_{m=1}^n p_{m-1}/q_m$, $\Pi_{m=1}^n q_m/p_m = p_0/(p_n \alpha_n)$,	**speziell** $p_n = p$, $q_n = q$
X ist transient	$\iff \sum_1^\infty 1/(p_n \, \alpha_n) < \infty$	$p > q$
X ist null-rekurrent	$\iff \sum_1^\infty 1/(p_n \, \alpha_n) = \infty$, $\sum \alpha_n = \infty$	$p = q$
X ist pos.-rekurrent	$\iff \sum_1^\infty 1/(p_n \, \alpha_n) = \infty$, $\sum \alpha_n < \infty$	$p < q$
die stat. Verteilung ist	$\pi_i = \alpha_i / \sum_0^\infty \alpha_n = 1/m_{ii}$	$\pi_i = (1 - \frac{p}{q})(\frac{p}{q})^i$

6.8 Satz. Sei X eine HMK mit *endlichem* Zustandsraum I und $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
(a) $\mathbf{P}$ besitzt den Eigenwert $\lambda_1 = 1$.
(b) $\mathbf{1} := (1, 1, \ldots, 1)^T$ ist rechter Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$.
(c) Jede stationäre Verteilung $(\mu_i, i \in I)$ ist linker Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$.
(d) Für alle Eigenwerte λ von $\mathbf{P}$ gilt $|\lambda| \le 1$.
(e) Sei $T := \{i \in I, i \text{ transient}\}$, $\mathbf{P}_T := (p_{ij}, \, i, j \in T)$ $\Rightarrow$ $|\lambda| < 1$ für alle Eigenwerte λ von $\mathbf{P}_T$.

Beweis. (a) folgt aus (b), **(b)** und **(c)** sind trivial.
(d) Sei $\lambda \, \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}$, d.h. $\lambda \, x_i = \sum_j p_{ij} \, x_j \, \forall i$. Sei $|x_i| = \max_j |x_j| \Rightarrow |\lambda| \le \sum p_{ij} |\frac{x_j}{x_i}| \le \sum p_{ij} = 1$.
(e) Sei $\lambda \, \mathbf{x} = \mathbf{P}_T \mathbf{x} \Rightarrow \lambda^n \mathbf{x} = \mathbf{P}_T \, \mathbf{x} \, \forall n$. Sei $|x_i| = \max_j |x_j|$ (wie oben).
Zu $i \in T$ ex. $j_0 \notin T$ und m mit $p_{ij_0}^{(m)} > 0 \Rightarrow |\lambda^m| \le \sum_{j \in T} p_{ij}^{(m)}$ (s. (d)) < 1.