

6. Grenzwertsätze für HMK

Wann konvergiert $p_{ij}^{(n)}$ und wogegen? Daraus folgt die Konv. von $P(X_n = j) = \sum_i P(X_0 = i) p_{ij}^{(n)}$.

Vorbemerkung : Falls $p_{ii}^{(n)}$ konvergiert, dann auch $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ii}^{(k)}$ (Césaro-Limes) gegen den selben Wert (s. 6.1), die langfristig je Takt erwartete Anzahl der Besuche in i ($= 1/m_{ii}$, s. 6.2).

6.1 Hilffssatz: (Grenzwertsatz für die gleitende Gewichtung einer Folge durch Faltung)

Sei $a_n \geq 0$, $a_n / \sum_{k=0}^n a_k \rightarrow 0$, $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ (z.B. $\sum_{k=0}^n a_k < \infty$ / (a_n) beschr. / $a_n \equiv 1$). Dann gilt:

(a) $\overline{\lim} (\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} / \sum_{k=0}^n a_k) \leq \overline{\lim} b_n$, $\underline{\lim} (\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} / \sum_{k=0}^n a_k) \geq \underline{\lim} b_n$,

(b) Aus $b_n \rightarrow b$ folgt $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} / \sum_{k=0}^n a_k \rightarrow b$.

Beweis: (a) Sei $b := \overline{\lim} b_n$: Sei b endlich ($b = +\infty$ ist trivial, $b = -\infty$ analog, $\underline{\lim}$ entspr.).

$\exists N : b_n \leq b + \varepsilon \ \forall n \geq N$, $\exists M \in \mathbb{R} : b_n - b \leq M \ \forall n \Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k (b_{n-k} - b) \leq \sum_{k=0}^{n-N} a_k \cdot \varepsilon + \sum_{k=n-N+1}^n a_k \cdot M$
 $\Rightarrow \dots \leq \varepsilon \cdot 1 + (M - \varepsilon) \sum_{m=0}^{N-1} a_{n-m} / \sum_0^n a_k \Rightarrow \overline{\lim} \dots \leq \varepsilon$, da $a_{n-m} / \sum_0^n a_k \leq a_{n-m} / \sum_0^{n-m} a_k \rightarrow 0$.

6.2 Satz (Spezialfälle des allgemeinen Grenzwertsatzes):

(a) Sei $i, j \in I$, j transient $\Rightarrow p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$, (b) i rekurrent, $d_i = 1 \Rightarrow p_{ii}^{(n)} \rightarrow \frac{1}{m_{ii}} \ (n \rightarrow \infty)$.

Beweis: (a) folgt aus 4.5 (c): j transient $\Rightarrow E_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty \Rightarrow p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$.

(b) „ $p_{ii}^{(n)} \rightarrow \frac{1}{m_{ii}}$ “ ist das „Erneuerungstheorem“, angewandt auf die Folge $\tau_i^{(1)} := \tau_i, \tau_i^{(2)}, \tau_i^{(3)}, \dots$

Wir zeigen (b1): Wenn $p_{ii}^{(n)}$ konvergiert, dann gegen $\frac{1}{m_{ii}}$. [zu (b2): „ $p_{ij}^{(n)}$ konv.“ s. CHUNG, S. 30]

Sei $r_n := P(\tau_i > n | X_0 = i)$, dann gilt $m_{ii} = E(\tau_i | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\tau_i > n | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n$.

Aus $\sum_{k=0}^n r_k p_{ii}^{(n-k)} = 1$ (*) (s.u.) folgt mit 6.1 $\underline{\lim} p_{ii}^{(n)} \leq \frac{1}{m_{ii}} \leq \overline{\lim} p_{ii}^{(n)}$, also (b1).

(*) folgt mit Methode des letzten Besuchs: $1 = \sum_{k=0}^n P(\text{bis } n \text{ letzter Besuch in } i \text{ z.Zt. } n-k | X_0 = i)$

$= \sum_{k=0}^n P(X_{n-k} = i, \text{ nächste Rückkehrzeit } \bar{\tau}_i > k | X_0 = i) = \sum_{k=0}^n p_{ii}^{(n-k)} P(\bar{\tau}_i > k | X_{n-k} = i, X_0 = i)$

$\stackrel{\text{(ME)}}{=} \sum_{k=0}^n p_{ii}^{(n-k)} P(\tau_i > k | X_0 = i) = \sum_{k=0}^n p_{ii}^{(n-k)} r_k$ (s. auch CHUNG, S. 29 (4)).

6.3 Allgemeiner Grenzwertsatz: Sei $i, j \in I$, $d_j = \text{Periode von } j$. Dann gilt:

(a) $p_{ij}^{(n d_j + r)} \rightarrow \frac{d_j}{m_{jj}} \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}^{(k d_j + r)}$, $1 \leq r \leq d_j$, $n \rightarrow \infty$.

(b) j rekurrent, $i \in K(j)$, $j \in K_r(i) \Rightarrow p_{ij}^{(n d_j + r)} \rightarrow \frac{d_j}{m_{jj}}$, $p_{ij}^{(m)} = 0$ für $m \not\equiv r \pmod{d_j}$.

(c) j transient oder null-rekurrent $\Rightarrow p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Beweis: (1) $i = j$, i rekurrent: Dann ist $\tilde{X} := (X_0, X_{d_i}, X_{2d_i}, \dots)$ mit $P(X_0 \in K_0(i)) = 1$ nach 3.7 (d) eine HMK mit Periode 1 (und i ist rekurrent). $\Rightarrow$ (mit 6.2 (b)) $p_{ii}^{(n d_i)} = \tilde{p}_{ii}^{(n)} \rightarrow \frac{1}{\tilde{m}_{ii}} = \frac{d_i}{m_{ii}}$.

(2) Allg. gilt $p_{ij}^{(n d_j + r)} = \sum_{\ell=1}^{(n d_j + r)} f_{ij}^{(\ell)} p_{jj}^{(n d_j + r - \ell)}$ (ℓ ist Zeitpunkt des ersten Besuchs in j).

Für Summanden > 0 gilt $r - \ell = 0 \pmod{d_j}$, also $p_{ij}^{(n d_j + r)} = \sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k d_j + r)} p_{jj}^{(n d_j - k d_j)}$.

Mit (1) folgt (a) für „ j rekurrent“. Aus 6.2 (a) und $m_{jj} = 0$ für „ j null-rekurrent“ folgt (c).

6.4 Folgerung: (a) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} \rightarrow f_{ij}^* / m_{jj}$ (Césaro-Limes: $a_n \rightarrow a \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \rightarrow a$).

(b) Positive Rekurrenz und Null-Rekurrenz sind Klasseneigenschaften.

(c) In einer endl. HMK ex. mind. eine positiv-rekurrente und keine null-rekurrente Klasse.

Beweis: (a) j rek., $d := d_j$: $\frac{1}{m_{d+r}} \sum_{k=1}^{m_{d+r}} p_{ij}^{(k)} = \frac{m}{m_{d+r}} \sum_{\ell=1}^d \left(\frac{1}{m} \sum_{\ell=0}^{m-1} p_{ij}^{(\ell d + \ell)} \right) + (\text{Rest})$

$\rightarrow \frac{1}{d} \sum_{\ell=1}^d \left(\frac{d}{m_{jj}} \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{ij}^{(\ell d + \ell)} \right) + 0 = f_{ij}^* / m_{jj}$, da $\sum_{\ell=1}^d \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{ij}^{(\ell d + \ell)} = f_{ij}^*$.

(b) Sei j pos.-rek., $i \in K(j) \Rightarrow \lim p_{ij}^{\ell d_j} > 0$ und es ex. m, n mit $p_{ii}^{(m + \ell d_j + n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(\ell d_j)} p_{ji}^{(n)} > 0$.

(c1) Nach 3.5 (d) ex. mind. 1 abgeschlossene und nach 4.7 (b) rekurrente Klasse.

(c2) Sei j rek., $i \in K(j)$. Wegen $\sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$ ist $\sum_{j \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n d_j + r)} = 1$, also können nicht alle Zustände in $K(j)$ null-rekurrent sein und damit nach (b) keiner.