

5. HMK im Gleichgewicht, stationäre Verteilungen

An Stelle des mittelfristigen Verhaltens einer HMK (Rechenaufwand $P(X_n = j)$ für alle n und j) genügt meist das Langzeitverhalten. Beobachtung: Immer wieder dieselben Zustände mit relativ konstanten relativen Häufigkeiten $h_n(i)$.

5.1 Beispiel: Länge einer Warteschlange, 0 bis 7 Kunden, 900 Zeittakte (Ankünfte und Abgänge als senkrechte Linien). Die relative Häufigkeit der Zustände $0, 1, 2, \dots$ bleibt jeweils ziemlich konstant. Der Prozess ist (langfristig) „im Gleichgewicht“.

Länge einer Warteschlange

(e)ps-File unter
/home/huebner/l05.eps (l05)
oder Link 'K6-Bild'

5.2 Definition: Eine HMK (X_n) ist **im Gleichgewicht**, wenn $P(X_n = i) := \pi_i$ unabhängig von n ist ($\forall i$). Eine Z-Dichte $(\pi_i, i \in I)$ heißt **Gleichgewichtsverteilung (GGV)** oder **stationäre Verteilung** der HMK (X_n) bzw. zu $\mathbf{P}$, wenn aus $P(X_0 = i) := \pi_i, i \in I$, auch $P(X_n = i) := \pi_i, i \in I, n \geq 0$, folgt.

5.3 Satz (Berechnung der GGV): (a) (π_i) ist genau dann GGV zu $\mathbf{P} = (p_{ij})$, wenn gilt:

$$\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij} \quad \text{für alle } j \in I \quad (\mathbf{G}), \quad \pi_j \geq 0 \quad \text{für alle } j \in I \quad \text{und} \quad \sum_{j \in I} \pi_j = 1 \quad (\mathbf{N}).$$

(b) Eine HMK im Gleichgewicht ist ein **stationärer Prozess** (s. § 1, Klassifikation 3(f)).

Beweis: (a) folgt direkt aus $P(X_{n+1} = j) = \sum_{i \in I} P(X_n = i) p_{ij}$ (beide Richtungen).

(b) $P(X_m = i_0, X_{m+1} = i_1, \dots, X_{m+n} = i_n) = \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n}$, unabhängig von m .

5.4 Bemerkung: Eine Lösung (≥ 0) von (G) allein heißt **invariantes** oder **stationäres Maß**.

5.5 Beispiel: Von zwei Telefonleitungen seien $i=0, 1, 2$ belegt. Als Gleichgewichtsbedingungen

$$\text{für } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \text{ erhält man } \begin{array}{ll} (\mathbf{G}_0) & \pi_0 = 0.7\pi_0 + 0.2\pi_1 + 0.1\pi_2 \\ (\mathbf{G}_1) & \pi_1 = 0.3\pi_0 + 0.5\pi_1 + 0.4\pi_2 \\ (\mathbf{G}_2) & \pi_2 = 0.3\pi_1 + 0.5\pi_2 \end{array} \quad \text{und } (\mathbf{N}) \quad \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

(Man beachte, dass spaltenweise, nicht zeilenweise addiert werden muss.)

Als eindeutige Lösung folgt $\pi_0 = 13/37 \approx 0.35$, $\pi_1 = 15/37 \approx 0.41$, $\pi_2 = 9/37 \approx 0.24$.

Im Gleichgewicht sind also mit Wahrscheinlichkeit $\pi_2 = 24\%$ beide Leitungen belegt.

Zur Vereinfachung des (oft großen) Gleichungssystems (G) kann folgendes „Schnittprinzip“ dienen.

5.6 Folgerung (Schnittprinzip): (a) Sei $K \subset I$. Im Gleichgew. gilt „ $P(X_n \in K)$ unabh. von n “ und daraus folgt $\sum_{i \in K} \sum_{j \in K^c} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in K} \sum_{j \in K^c} \pi_j p_{ji}$ (**S**).

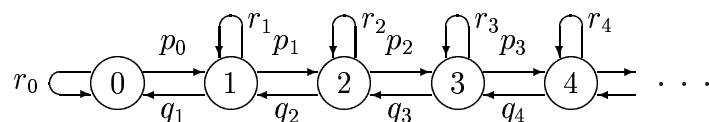
(b) Ist der Ü-Graph linear (oder ein Baum), dann wird (G) „lokal“: $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \forall i, j$ (**L**).

Beweis: Im Gleichgewicht sind die W. für einen Übergang von K nach K^c und umgekehrt gleich.

5.7 Beispiel (s. 4. u. 4C. Bsp. 3):

Warteschlangenlänge, $I := \mathbb{N}_0$,

$$p_i := p_{i,i+1}, q_i := p_{i,i-1}, r_i := p_{ii},$$



$q_i + r_i + p_i = 1, q_0 = 0$: Mit (L): $\pi_{n-1} p_{n-1} = \pi_n q_n \Rightarrow \pi_n = \pi_0 \prod_{m=1}^n (p_{m-1}/q_m) =: \pi_0 \alpha_n$ ($\alpha_0 = 1$), mit (N): $1 = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$. Falls $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$, dann ex. e. GGV, falls $= \infty$, ex. keine. Speziell: $p_n = p, q_n = q \Rightarrow \alpha_n = (p/q)^n, p < q \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 1/(1-p/q), \Rightarrow \pi_n = (1-p/q)(p/q)^n$.

5.8 Folgerung: Bei einer HMK mit GGV (π_j) gilt für jede Klasse $K(i)$

(a) entweder $\pi_j > 0 \forall j \in K(i)$ oder $\pi_j = 0 \forall j \in K(i)$, (b) $\pi_j = 0 \forall j \in K(i)$, falls $K(i)$ nicht abgeschl..

Bemerkung: Zu Existenz u. Eindeutigkeit von GGV (u.ä.) siehe Abschnitt 6.