4 B. Rekurrenz und Transienz als Klasseneigenschaft

4.6 Satz: (a) Ist i rekurrent [bzw. transient], dann sind auch alle $j \in K(i)$ rekurrent [transient].
(b) Ist i rekurrent und $i \rightsquigarrow j$, dann ist $f^*_{ji} = 1$, $j \in K(i)$ und es gilt $f^*_{ij} = 1$, $g_{ij} = 1$.

Beweis: (a) Mit 4.5 (c2) $E_{ii} = \sum_{n=1}^\infty p_{ii}^{(n)} = \infty \overset{(?)}{\Longrightarrow} E_{jj} = \infty$: Für $j \in K(i)$ ex. m, l mit $p_{ij}^{(m)} > 0, p_{ji}^{(\ell)} > 0$, also $E_{jj} \geq \sum_{n=1}^\infty p_{jj}^{(n+m+\ell)} \geq \sum_{n=1}^\infty p_{ji}^{(\ell)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(m)} = p_{ji}^{(\ell)} p_{ij}^{(m)} \sum_{n=1}^\infty p_{ii}^{(n)}$, also gilt „$i$ rek. $\Rightarrow$ j rek.“.
(b) Z.z. (b1) $f^*_{ji} = 1$ [daraus folgt $j \rightsquigarrow i$ und (b2) bis (b4)]: n.Vor. ex. $i_0 = i, \ldots, i_n = j$ mit $p_{i_{k-1} i_k} > 0$, daraus induktiv $1 = f^*_{i_{k-1},i} = p_{i_{k-1},i} + \sum_{m \neq i} p_{i_{k-1},m} f^*_{mi} \leq \sum_m p_{i_{k-1},m} = 1$, also $f^*_{i_k,i} = 1$.

Bemerkung: Wg. 4.6 (a) heißt mit i auch die Klasse $K(i)$ transient bzw. (pos./null-)rekurrent. Dass auch „positiv rek.“ und „null-rek.“ Klasseneigenschaften sind, wird später gezeigt.

4 C. Ein (nützliches) Kriterium für Transienz/Rekurrenz

4.7 Satz: (a) $K(i)$ nicht abgeschlossen $\Longrightarrow$ $K(i)$ ist transient.
(b) $K(i)$ abgeschlossen, endlich $\Longrightarrow$ $K(i)$ ist rekurrent.
(c) Sei $K(i)$ abgeschlossen, $i_0 \in K(i)$. Dann ist $(y_j := f^*_{ji_0}, j \neq i_0)$ die kleinste Lösung von
$(*)$ $y_j = \sum_{k \in K(i)} p_{jk}\, y_k$ mit $y_{i_0} = 1$ und $y_j \geq 0$ ($f^*_{i_0 i_0}$ aus 4.2 (b)) und es gilt:
$K(i)$ transient $\Longleftrightarrow \exists j \in K(i), j \neq i_0$ mit $f^*_{ji_0} < 1 \Longleftrightarrow (*)$ hat e. beschr., nicht-konst. Lösung.

Beweis: (a): 4.6 (b), (b) $\exists j: g_{ij} > 0 \Rightarrow f^*_{jj} = 1$, (c1) mit 4.2 (b), kleinste L.: $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{y}$ mit $\tilde{p}_{i_0 j} = \delta_{i_0 0}$, $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{P}}^{(n)}\mathbf{y}$, $y_j \geq \tilde{p}_{ji_0}^{(n)} = \sum_{k=1}^n \tilde{f}_{ji_0}^{(k)} = \sum_{k=1}^n f_{ji_0}^{(k)} \uparrow f^*_{ji_0}$. (c2) aus $f^*_{i_0 i_0} = \ldots$, (c3): (y_j) u. $(a\, y_j + b)$ Lösg..
Beispiel 3: $y_{n+1} = y_0 + (y_1 - y_0)\beta_n$, $\beta_n := \sum_{l=0}^n \Pi_{m=1}^l (q_m/p_m)$, nicht-konst.: $y_1 \neq y_0$, beschr.: $\beta_\infty < \infty$.

Bemerkung: Wir werden zeigen, dass es keine endlichen null-rekurrenten Klassen gibt. Deshalb folgt rekurrent/transient bei endl. $K(i)$ (bzw. I) schon aus abgeschl./nicht-abgeschl.

4 D. Exkurs: Über den Informationsgehalt von Sigma-Algebren

1. Durch ZV $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ werden Ereignisse beschrieben: $X^{-1}(B) := \{X \in B\} \in \mathcal{A}$ ($B \in \mathcal{B}$), und $\sigma(X) := \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ (auch $X^{-1}(\mathcal{B})$) ist eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$.

2. Ebenso ist für $X = (X_1, \ldots, X_n) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\times_{t=1}^n \mathcal{X}_t, \otimes_{t=1}^n \mathcal{B})$ die σ-Algebra
$\sigma(X) = \sigma(X_1, \ldots, X_n) := X^{-1}(\otimes_{t=1}^n \mathcal{B}) = \sigma(X^{-1}(\times_{t=1}^n \mathcal{B})) = \sigma(\bigcup_{t=1}^n X_t^{-1}(\mathcal{B}))$ definiert.

Bemerkung: $X_1, \ldots, X_n$ gibt Auskunft über das Eintreten von A $\forall A \in \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

3. Allgemein definiert man für einen stochastischen Prozess $X = (X_t,\, t \in T)$ mit $T \subset \mathbb{R}$:
$\mathcal{A}_t^0 := \sigma(X_s, s \leq t) := \sigma(\bigcup_{s \leq t} X_s^{-1}(\mathcal{B}))$. Jedes X_t ist $\mathcal{A}_t^0$-$\mathcal{B}$-messbar. $(\mathcal{A}_t^0, t \in T)$ ist eine (in t) **aufsteigende Familie von σ-Algebren**.

4. Eine aufsteigende Familie $(\mathcal{A}_t, t \in T)$ heißt auch **Filtration** in $\mathcal{A}$. (X_t) heißt $(\mathcal{A}_t)$-**adaptiert**, wenn jedes X_t $\mathcal{A}_t$-$\mathcal{B}$-messbar ist, d.h. wenn $\mathcal{A}_t^0 \subset \mathcal{A}_t$ (Info von X_t ist Teil der Info von $\mathcal{A}_t$).

4 E. Exkurs: Stoppzeiten und starke Markov-Eigenschaft

1. Sei $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ ein stoch. Prozess, $X_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$, $\overline{\mathbb{N}}_0 := \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.
Eine ZV $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}_0$ heißt **Stoppzeit** bzgl. (X_n), wenn $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{A}_n^0 = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$: die zum Stoppen benötigte Information steckt in $(X_1, \ldots, X_n)$. Allgemeiner heißt τ Stoppzeit für $(X_t, t \in T), T \subset \mathbb{R}$ [bzw. bzgl. einer Filtration $(\mathcal{A}_t)$], wenn $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{A}_t^0$ [bzw. $\in \mathcal{A}_t$].

2. Zu einer Stoppzeit τ bzgl. (X_n) definiert man
den **Prae-τ-Prozess** $X_n^{(\tau)} := X_{\min(\tau,n)}$): der Prozess wird auf X_τ „eingefroren“,
den **Post-τ-Prozess** $({}^{(\tau)}X_n := X_{\tau+n})$*: der Prozess beginnt z.Zt. τ in X_τ neu
(* mit $X_{\tau+n} := \Delta$, falls $\tau(\omega) = \infty$. Δ ist e. fiktiver Zustand, „irrelevant“ o.ä.).

3. Für einen homogenen Markov-Prozess, also insbes. für eine homogene Markov Kette gilt die **starke Markov-Eigenschaft:** Der Post-τ-Prozess $({}^{(\tau)}X_n)$ hat das selbe stochastische Verhalten wie (X_n), unabhängig von der Vergangenheit vor τ, in Formeln:
$P(({}^{(\tau)}X_n) \in B' | X_\tau = i, (X_m^{(\tau)}) \in A') = P(({}^{(\tau)}X_n) \in B' | X_\tau = i) = P((X_n) \in B' | X_0 = i)$,
$P(X_\tau = i_0, X_{\tau+1} = i_1, \ldots, X_{\tau+n} = i_n) = P(X_\tau = i_0) p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$.