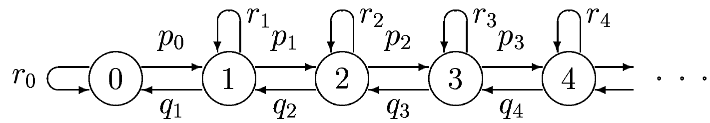
4. Rekurrenz und Transienz

Bisher: Erreichbarkeit – ja oder nein? Jetzt: – W(„ja") = ? – Wann im Mittel? – Wie oft?

Beispiele: 1. Rückstellungen eines Versicherers, $I = \mathbb{N}_0$, $i = 0 \;\hat{=}\;$ „Ruin": – W(„Ruin")? – Wann?

2. Wasserstand eines Staudamms, $I = \{0, 1, \ldots, r\}$: – W(Überlauf)?, W(„läuft leer")? (Fische!).

3. Warteschlangenlänge, $I := \mathbb{N}_0$,
$p_i := p_{i,i+1}, q_i := p_{i,i-1}, r_i := p_{ii}$,
$q_i + r_i + p_i = 1$, $q_0 = 0$: Wann leer?



4. Symmetrische „Irrfahrt" auf $I = \mathbb{Z}$, $p_i = q_i = \frac{1}{2}$: Rückkehrzeit? Entsprechend auf $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^3$.

5. Einfaches Beispiel: $I = \{1, 2, 3\}$, $p_{11} = .2, p_{12} = .4, p_{13} = .4, p_{22} = 1, p_{31} = .4, p_{33} = .6$, sonst 0.
Wie groß ist die W (f_{ij}^*), bei Start in $i = 1$ irgendwann nach $j = 1, 2, 3$ zu kommen?
Wie lange wird es im Mittel dauern? Vermutung: $m_{11} = \quad m_{12} = \quad m_{13} = \quad ?$

4.1 Definition: (a) $\tau_j := \inf\{n \in \mathbb{N}^* : X_n = j\}$ heißt **Ersteintrittszeit** (in j) ($\inf \emptyset = \infty$),
$f_{ij}^{(n)} := P(\tau_j = n | X_0 = i) = P(X_n = j, X_s \neq j, 0 < s < n | X_0 = i)$, die W., erstes j z.Zt. n,
$f_{ij}^* := P(\tau_j < \infty | X_0 = i) = P(\exists\, n > 0 \text{ mit } X_n = j | X_0 = i)$, die W., überhaupt nach j zu kommen,
$m_{ij} := E(\tau_j | X_0 = i) = \sum_{n=1}^\infty n\, f_{ij}^{(n)} + \infty\,(1 - f_{ij}^*)$ heißt **mittlere Übergangs-/Rückkehrzeit**.
(b) $i \in I$ heißt **rekurrent**, falls $f_{ii}^* = 1$, andernfalls **transient**.
Ein rekurrenter Zustand i heißt **positiv rekurrent**, falls $m_{ii} < \infty$, sonst **nullrekurrent**.

Bemerkung: 1. Bei $m_{ii} < \infty$ ist die mittlere Aufenthalts-W. in i $(= \frac{1}{m_{ii}}) > 0$, daher pos. rek..
2. Falls $P(X_0 = i) = 0$, sei $P(\ldots X_n \ldots | X_0 = i)$ def. durch $P(\ldots X_{\ell+n} \ldots | X_\ell = i)$.

4.2 Berechnung von $f_{ij}^{(n)}$, f_{ij}^*, m_{ij}: (a) $f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$, für $n > 1$: $f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)}$.
(b) $f_{ij}^* = \sum_{n=1}^\infty f_{ij}^{(n)}$, $f_{ij}^* = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^*$. (c) $m_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} m_{kj}$.

4.3 Folgerung: (a) $i \rightsquigarrow j \iff f_{ij}^* > 0$ (Beweis?), (b) i transient $\Longrightarrow m_{ii} = \infty$ (nicht umgek.).

Beispiel 5: $f_{11}^* = 0.6$, $f_{22}^* = 1$, $f_{33}^* = 0.8$, $m_{12} = 5$, $m_{22} = 1$, $m_{31} = 2.5$, $m_{32} = 7.5$, sonst ∞, also?

Beispiel 4, Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$: $f_{i0}^* = ?$ Für $i \geq 0$ induktiv $f_{i+1,0}^* = f_{10}^* + i(f_{10}^* - 1)$.
Daraus $f_{10}^* = 1$, ebenso für $i < 0$, also auch $f_{00}^* = \frac{1}{2}(f_{10}^* + f_{-1,0}^*) = 1$.
Aus $m_{i0} = |i|\, m_{10}$ (warum?) und $m_{10} = 1 + \frac{1}{2} m_{20} = 1 + m_{10}$ folgt $m_{10} = m_{i0} = \infty$.

4.4 Definition: $A_j := \sum_{n=1}^\infty 1_{\{X_n = j\}}$ = Anzahl der Besuche in j, dazu Verteilung und Erw.wert:
$g_{ij}^{(k)} := P(A_j \geq k | X_0 = i)$, $g_{ij} := P(A_j = \infty | X_0 = i)$, $E_{ij} := E(A_j | X_0 = i)$.

4.5 Folgerung: (a) $g_{ij}^{(1)} = f_{ij}^* \geq g_{ij}^{(k)} \downarrow g_{ij}$, $g_{ij}^{(k)} = f_{ij}^*\, g_{jj}^{(k-1)} = f_{ij}^* (f_{jj}^*)^{k-1}$, $g_{ij} = f_{ij}^*\, g_{jj} = f_{ij}^* (f_{jj}^*)^\infty$.
(b) $E_{ij} = \sum_{n=1}^\infty p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^\infty g_{ij}^{(k)} = f_{ij}^*/(1 - f_{jj}^*)$, aus $E_{jj} = \infty\, [< \infty]$ folgt $f_{jj}^* = 1\, [f_{ij}^* = E_{ij}/(1 + E_{jj})]$.
(c) **Rekurrenz-Kriterium:** i rekurrent [transient] $\iff g_{ii} = 1\, [0] \iff E_{ii} = \infty\, [< \infty]$.

Beweis zu 4.5: (a1) aus Def., (a2) $g_{ij}^{(k)} = P(A_j \geq k | X_0 = i) = \sum_{n=1}^\infty P(\tau_j = n, A_j \geq k | X_0 = i) =$
$= \sum_{n=1}^\infty P(\tau_j = n | X_0 = i) P(A_j \geq k | \tau_j = n, X_0 = i) \overset{(?)}{=} \sum_{n=1}^\infty f_{ij}^{(n)}\, P(A_j \geq k - 1 | X_0 = j) =$
$= \sum_{n=1}^\infty f_{ij}^{(n)}\, g_{jj}^{(k-1)} = f_{ij}^*\, g_{jj}^{(k-1)} = \ldots = f_{ij}^*\, (f_{jj}^*)^{k-1}$, auch für $k \to \infty$.
(b2) mit $EX = \sum_{k=1}^\infty P(X \geq k)$ für $X(\Omega) \subset \mathbb{N}_0$, (b3) aus (a), (b4) aus (b3), (c) aus (a),(b).

Bemerkung: 1. Der Beweis an der Stelle (?) folgt aus der „starken Markov-Eigenschaft",
d.h. nach dem Ereignis $\{\tau_j = n\}$ (wobei τ_j eine „Stoppzeit" ist) beginnt die HMK neu
als (X_n'), aber mit Start in j (s.u.).
2. $g_{ij} = (0 \text{ oder } 1)$ folgt auch aus dem 0-1-Gesetz, ebenso „$\sum p_{ij}^{(n)} < \infty \Rightarrow g_{ij} = 0$",
aber die Umkehrung „$\sum p_{ij}^{(n)} = \infty \Rightarrow g_{ij} = 1$" enthält die Unabhängigkeit der Prozessverläufe
zwischen den Besuchen in j.