

2. Homogene Markov-Ketten mit diskreter Zeit – HMK

2.1 Definition: Eine **Markov-Kette mit diskreter Zeit** (kurz **MK**) ist ein Stochastischer Prozess X mit $T = \mathbb{N}_0$, abz. Zustandsraum, hier I , und der (diskreten) Markov-Eigenschaft

$$(ME) \quad P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}), \\ \text{falls } P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) > 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*, i_k \in I).$$

2.2 Folgerung: Für eine Markov-Kette (mit diskreter Zeit) gilt $(\ell, m, n \in \mathbb{N}^*, i_\nu, i, j \in I)$:

- (a) $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0)P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \dots P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) =: (*_{0,n})$.
- (b) Wenn man die Gegenwart z.Zt. n (genau) kennt, ist die Zukunft von der Vorgeschichte st.u..
- (c) $P(X_{\ell+m+n} = j | X_\ell = i) = \sum_{k \in I} P(X_{\ell+m} = k | X_\ell = i)P(X_{\ell+m+n} = j | X_{\ell+m} = k)$.

Beweis: (a) L.S. $= P(X_0 = i_0)P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \dots P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \stackrel{(ME)}{=} \text{r.S.}$,
 (b) Geg. $G := \{X_n = i_n\}$, Verg. $A = \{(X_0, \dots, X_{n-1}) \in A'\}$, Zuk. $B = \{(X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) \in B'\}$,
 i_n fest, $\Rightarrow P(B|AG) = \sum_{(i_0, i_1, \dots, i_{n-1}) \in A'} \sum_{(i_{n+1}, \dots, i_{n+m}) \in B'} (*_{0,n+m}) / \sum_{(i_0, i_1, \dots, i_{n-1}) \in A'} (*_{0,n}) =$
 $= \sum_{(i_{n+1}, \dots, i_{n+m}) \in B'} P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) \dots P(X_{n+m} = i_{n+m} | X_{n+m-1} = i_{n+m-1})$, unabh. von A ,
 (c) folgt aus (b) mit $P(X_{\ell+m+n} = j | X_\ell = i, X_{\ell+m} = k) = P(X_{\ell+m+n} = j | X_{\ell+m} = k)$.

2.3 Bemerkung: Die allg. Markov-Eigenschaft aus Klassif. 3(b) folgt aus (ME) (s. 2.1) mit 2.2(b).

2.4 Definition: Eine MK (X_n) heißt **homogen** (HMK), wenn $\forall i, j \in I, \forall n$ mit $P(X_{n-1} = i) > 0$
 $P(X_n = j | X_{n-1} = i) =: p_{ij}$ unabh. von n . Es existiere (o.E.) $\forall i$ ein n mit $P(X_{n-1} = i) > 0$.

2.5 Folgerung: Sei X eine homogene Markov-Kette, $P(X_0 = i) := p_0(i)$. Dann gilt:

- (a) $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = p_0(i_0)p_{i_0 i_1}p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n}$,
- (b) Die m -Schritt-ÜW $P(X_n + m = j | X_n = i) =: p_{ij}^{(m)}$ sind unabh. von n , falls $P(X_n = i) > 0$,
- (c) CHAPMAN-KOLMOGOROV-Gleichungen: $p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$, $n, m \in \mathbb{N}^*, i, j \in I$.

2.6 Rekursive Berechnung: (a) $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in I} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}$.

- (b) $p_n(j) := P(X_n = j) = \sum_{i \in I} p_0(i) p_{ij}^{(n)}$, $p_n(j) = \sum_{i \in I} p_{n-1}(i) p_{ij}$. (Was ist einfacher für $p_n(j)$?)

2.7 Matrix-Darstellung: $(\sum_{k \in I} p_{ik} p_{kj}$ ist Matrix-Produkt!) Ist $\mathbf{P} := (p_{ij})$, $\mathbf{P}^{(n)} := (p_{ij}^{(n)})$
 und $\mathbf{p}_n := (p_n(i))$ (Zeilen-Vektor), so gilt $\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \mathbf{P}^{(m)}$ (CHAPMAN-KOLMOGOROV)
 und durch Induktion $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$, ebenso $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{p}_{n-1} \mathbf{P}$.

2.8 Bemerkung: (a) Man benutzt auch abzählbar-unendliche Matrizen (alles ist ≥ 0).

- (b) Matrizen $\mathbf{P} = (p_{ij})$ mit $p_{ij} \geq 0$ und $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1 \forall i \in I$ nennt man **stochastische Matrizen**.
- (c) Sind $\mathbf{P}$ und $\bar{\mathbf{P}}$ stochastische Matrizen, dann auch die Matrix $\mathbf{P} \bar{\mathbf{P}}$ (nachrechnen!).

3. Strukturen von homogenen Markov-Ketten

Beobachtungen des (Grenz-)Verhaltens von $\mathbf{p}_n$ an Beispielen.

1. (Lagerbestand 0, 1, 2, 3, bei 0, 1 auffüllen auf 3, $P(\text{Nachfrage} = 0/1/2/3) = 0.1/0.6/0.2/0.1$.)

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} .1 & .2 & .6 & .1 \\ .1 & .2 & .6 & .1 \\ .3 & .6 & .1 & .0 \\ .1 & .2 & .6 & .1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mathbf{p}_0 := (.2 \ .0 \ .6 \ .2) \\ \mathbf{p}_1 := (.22.44.30.04) \\ \mathbf{p}_2 := (.16.32.45.07) \\ \mathbf{p}_\infty := (.18.36.40.06) \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{l} \mathbf{p}'_0 := (.2 \ .0 \ .2 \ .6) \\ \mathbf{p}'_1 := (.14.28.50.08) \\ \mathbf{p}'_2 := (.20.40.35.09) \\ \mathbf{p}'_\infty := (.18.36.40.06) \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{p}_n \text{ und } \mathbf{p}'_n \\ \text{konvergieren} \\ \text{zum selben} \\ \text{Grenzwert.} \end{array}$$

$$2. \quad \mathbf{P} := \begin{pmatrix} .4 & .0 & .6 & .0 \\ .0 & .6 & .0 & .4 \\ .5 & .0 & .5 & .0 \\ .0 & .7 & .0 & .3 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mathbf{p}_0 := (.2 \ .0 \ .6 \ .2) \\ \mathbf{p}_1 := (.38.14.42.06) \\ \mathbf{p}_2 := (.36.13.44.07) \\ \mathbf{p}_\infty := (.36.13.44.07) \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{l} \mathbf{p}'_0 := (.2 \ .0 \ .2 \ .6) \\ \mathbf{p}'_1 := (.18.42.22.18) \\ \mathbf{p}'_2 := (.18.38.22.22) \\ \mathbf{p}'_\infty := (.18.38.22.22) \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{p}_n \text{ und } \mathbf{p}'_n \\ \text{konvergieren zu} \\ \textbf{verschiedenen} \\ \text{Grenzwerten.} \end{array}$$

$$3. \quad \mathbf{P} := \begin{pmatrix} .0 & .5 & .0 & .5 \\ .6 & .0 & .4 & .0 \\ .0 & .75 & .0 & .25 \\ .2 & .0 & .8 & .0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mathbf{p}_0 := (.2 \ .0 \ .6 \ .2) \\ \mathbf{p}_1 := (.04.55.16.25) \\ \mathbf{p}_2 := (.38.14.42.06) \\ \mathbf{p}_3 := (.10.51.10.30) \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{p}_4 := (.36.13.44.07) \\ \mathbf{p}_\infty := (.09.51.11.29) \\ \text{oder} \\ \mathbf{p}_\infty := (.36.13.44.07) \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{p}_n \\ \text{konvergiert} \\ \textbf{nicht} \text{ (zwei} \\ \text{Häufungspkte).} \end{array}$$

Kann man das unterschiedliche Verhalten aus der Struktur der Matrix vorhersagen?