Einleitung

Ein **Stochastischer Prozess** beschreibt die Zustände eines vom Zufall beeinflussten Systems in aufeinander folgenden Zeitpunkten.

Beispiele: Aktienkurse, Produktions-Abläufe, Datenflüsse in IT-Netzen, Schadensumme einer Versicherung, physikalische und biologische Prozesse.

Ziel: Die wichtigsten Typen von Stochastischen Prozessen u. deren Eigenschaften kennen lernen.

Programm: Markov-Ketten (diskrete und stetige Zeit), Markov-Prozesse, Poisson-Prozesse, Brownsche Prozesse, Martingale, Itô-Prozesse, Stoch. Differentialgleichungen: jeweils Strukturen, Eigenschaften, langfristiges Verhalten und Anwendungen.

Literatur: Chung: Elementare W-Theorie und Stochastische Prozesse, Kap. 8 (einfach),
Chung: Markov Chains with Stationary Transition Probabilities (sehr exakt),
Çinlar: Introduction to Stochastic Processes (gut lesbar),
Resnick: Adventures in Stochastic Processes (zum Schmökern, mit 'Happy Harry'),
Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie (ab 'Markov-Prozesse'),
Arnold: Stochastische Differentialgleichungen.

1. Stochastische Prozesse: Definition, Darstellung, Existenz

Definition: Ein **Stochastischer Prozess** X ist eine Familie von Zufallsvariablen, festgelegt durch einen W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *einen* Bildraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ als *Zustandsraum*, eine geordnete (Zeit-)Parametermenge $T(\subset \mathbb{R})$ und messbare Abbildungen $X_t \colon \Omega \to \mathcal{X}$, $t \in T$.
Notation: $X := (X_t : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B}),\ t \in T)$, kurz $X = (X_t,\ t \in T)$ oder $X = (X_t)$.
Ein **Pfad** des Prozesses ist *ein* beobachteter Ablauf, d.h. die Abb. $t \mapsto X_t(\omega)$ für *ein* festes ω.

Klassifikation: 1. Zustandsraum $\mathcal{X}$: abzählbar oder überabzählbar, evtl. Dimension,
2. Parametermenge T: abzählbar (meist $\mathbb{N}_0$) oder überabzählbar (meist $\mathbb{R}_{\geq 0}$),
3. Abhängigkeiten der X_t untereinander: (im Folg. gelte $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $t_i \in T$, $t_i + h \in T$)
(a) Alle X_t stochastisch unabhängig: $\mathcal{L}(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = \bigotimes_{i=0}^n \mathcal{L}(X_{t_i})$, $[\mathcal{L}(X) := P^X]$
(b) Markov-Prozesse: $\mathcal{L}(X_{t_n} | X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-1}}) = \mathcal{L}(X_{t_n} | X_{t_{n-1}})$ (falls alles definiert),
(c) Prozesse mit unabh. Zuwächsen: $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ stoch. unabh.,
(d) Martingale: X_t integrierbar $\forall\, t \in T$ und $E(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} | X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-1}}) = 0$ (P-f.s.),
(e) Prozesse mit stationären Zuwächsen: $\mathcal{L}(X_{t_1+h} - X_{t_0+h}) = \mathcal{L}(X_{t_1} - X_{t_0})$,
(f) stationäre Prozesse: $\mathcal{L}(X_{t_0+h}, X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h}) = \mathcal{L}(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.

Jeder Stoch. Prozess besitzt eine **kanonische Darstellung**: $\Omega := \times_{t \in T} \mathcal{X}_t$ $((\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t) := (\mathcal{X}, \mathcal{B}))$,
X_t sei t-te Projektion von Ω ($\Rightarrow$ jedes $\omega \in \Omega$ ist ein Pfad), $\mathcal{A} := \bigotimes_{t \in T} \mathcal{B}_t := \sigma(\bigcup_{t \in T} X_t^{-1}(\mathcal{B}_t))$,
P wird über endl.-dim. Randverteilungen definiert, z.B. mit endl.-stufiger Koppelung und Erzeuger $\mathcal{Z} := \{(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n})^{-1}(B),\ n \geq 0,\ t_i \in T,\ B \in \bigotimes_{i=0}^n \mathcal{B}_{t_i}\}$.
(!) Bei überabzählb. T sagt die kanon. Darst. i.allg. nichts über das Verhalten einzelner Pfade.
Beispiel 1.1: $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathcal{R}(0,1))$, $T = [0,1]$, $X_t(\omega) = 1_{\{t\}}(\omega)$, $X'_t(\omega) \equiv 0$ $(t \in T)$
$\Rightarrow$ endl.-dim. Vert. von $(X_t), (X'_t)$ sind gleich - und damit auch die kanonischen Darstellungen.

Existenz und Eindeutigkeit von P erhält man aus einem der beiden folgenden Sätze.

Satz v. Ionescu-Tulcea: Sei $T = \mathbb{N}_0$, Q_0 W-Maß über $\mathcal{X}$, Q_{i+1}^i ÜW-Maß von $\mathcal{X}^i$ nach $\mathcal{X}$, $i \geq 0$, dann gibt es genau ein W-Maß P über $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $P^{(X_0, X_1, \ldots, X_n)} = Q_0 \otimes Q_1^0 \otimes Q_2^1 \otimes \ldots \otimes Q_n^{n-1}$.

Satz von Kolmogorov: Sei T bel., $\mathcal{E} := \{E \subset T : E \text{ endlich}, \neq \emptyset\}$. Für $E \in \mathcal{E}$ sei Q_E ein W-Maß über $\Omega_E := \times_{t \in E} \mathcal{X}_t$,. Dann gibt es genau ein W-Maß P über $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $P^{(X_t, t \in E)} = Q_E$,
falls 1. $(\mathcal{X}_t, \mathcal{O}_t)$ vollst. separabler metr. (= polnischer) Raum, $\mathcal{B}_t := \sigma(\mathcal{O}_t)$, ($\Rightarrow$ $\exists$ bed. Vert.)
2. die Familie $\{Q_E, E \in \mathcal{E}\}$ *projektiv* (konsistent, verträglich) ist,
d.h. für jede Projektion $pr_F^E : \Omega_E \to \Omega_F$ $(E, F \in \mathcal{E}$ mit $F \subset E)$ gilt $(Q_E)^{pr_F^E} = Q_F$.

Beweisidee: Erzeuger $\mathcal{Z}$ bei (K) wie oben, bei (I-T) mit X_i statt X_{t_i}. $\mathcal{Z}$ ist ein (Mengen-)Ring, $Q_0 \otimes \ldots Q_n^{n-1}$ bzw. (Q_E) induziert e. „Inhalt" P auf $\mathcal{Z}$. Z.z. P ist nullstetig, also (Prä-)Maß.