Stochastische Prozesse

§12 Das stochastische (Itô-) Integral

Motivation: Ein stoch. Prozess werde von Störungen in Form eines Brown-Prozesses W_t beeinflusst. Die Größe des Einflusses in $(s, s+ds)$ werde durch eine Gewichtsfkt. $b(s,\omega)$ bestimmt, die der Störung $W_{s+ds} - W_s$ das Gewicht $b(s,\cdot)$ verleiht. ($b(s,\omega)$ kann auch negativ sein!) Der „Prozess" $(b(s,\cdot))$ darf keine Information über $(W_u - W_s, u \ge s)$ enthalten, aber durchaus über $(W_u, 0 \le u \le s)$. Der Gesamt-Einfluss ist dann „$\int b(s)\,dW(s)$".

12.1 Definition: Eine aufsteigende Folge von σ-Algebren $(\mathcal{A}_t, t \in [0,T])$ heißt nicht-vorgreifend bzgl. des Brown-Prozesses $(W_t, t \in [0,T])$, wenn $\mathcal{A}_s^W := \sigma(W_u, 0 \le u \le s) \subset \mathcal{A}_s$ und $\sigma(W_u - W_s, s \le u \le T)$ stochastisch unabhängig von $\mathcal{A}_s$ ist.
Ein stoch. Prozess $(b(s,\cdot))$ heißt nicht-vorgreifend bzgl. $(\mathcal{A}_s)$, wenn $b(s,\cdot)$ $\mathcal{A}_s$-meßbar ist.
Sei $M_1[0,T]$ ($M_2[0,T]$) die Menge aller n.v. Prozesse mit $\int_0^T |b(s)|\,ds < \infty$ ($\int_0^T b^2(s)\,ds =: \hat{B}(T) < \infty$) P-f.s.

Bemerkung: Wir betrachten den 1-dim. Fall. Im allg. ist (W_t) n-dimensional, $b(s,\omega)$ ist eine $m \times n$-Matrix und statt $|b(s)|$, $b^2(s)$ wird $\|b(s)\|_2$, $\|b(s)\|_2^2$ gesetzt.

12.2 Definition (Vorstufe des stoch. Integrals mit Treppenfkt. $b(\cdot,\omega)$):
Sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t \le T$ und $b(s,\cdot) = b(t_{k-1},\cdot)$ auf $[t_{k-1}, t_k)$ P-f.s. Dann setzt man
$$B(t) := \int_0^t b\,dW := \int_0^t b(s)\,dW(s) := \sum_{i=1}^k b(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \qquad (B(t) \text{ ist ZV!})$$

12.3 Satz u. Definition: Sei $(b(s,\cdot)) \in M_2[0,T]$. Dann ex. eine Folge von Treppenfkt. $b_\ell \in M_2[0,T]$ mit $\int_0^t (b(s) - b_\ell(s))^2\,ds \to 0$ P-f.s. und für jede solche Folge konvergiert $B_\ell(t) = \int_0^t b_\ell\,dW$ stoch. gegen einen Prozess $B(t)$ – und damit auch für jede Folge gegen denselben Prozess $B(t)$. Man setzt $B(t) =: \int_0^t b(s)\,dW(s)$. $B(t)$ heißt dann Itô-Integral.

12.4 Eigenschaften von $\int_0^t b\,dW$: (a) $\int_0^t (c b_1 + d b_2)\,dW = c \int_0^t b_1\,dW + d \int_0^t b_2\,dW$.
(b) $E(\int_0^t b\,dW) = 0$ (c) $Var(\int_0^t b\,dW) = \int_0^t E\,b^2(s)\,ds = E\int_0^t b^2(s)\,ds = E\,\hat{B}(t)$.

Beweis: (a) direkt, (b) aus $E\,b(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = E\,b(t_{i-1})\,E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = E\,b(t_{i-1}) \cdot 0 = 0$.
(c) $Var(\int\cdots) = E(\int\cdots)(\int\cdots) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k E\,b_\ell(t_{i-1})\Delta_i W\, b_\ell(t_{j-1})\Delta_j W = \sum_{i=1}^k E\,b_\ell^2(t_{i-1})\,E(\Delta_i W)^2 + \cdots$
$\cdots + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{i-1} E\,b_\ell(t_{i-1})\,b_\ell(t_{j-1})\,\Delta_j W\, E(\Delta_i W) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k E \cdots E(\Delta_j W) = \sum_{i=1}^k E\,b_\ell^2(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) = \int_0^t E\,b_\ell^2(s)\,ds$.

12.5 Definition: Sei X_0 $\mathcal{A}_0$-meßb. ZV, $a(s,\cdot) \in M_1[0,T]$, $b(s,\cdot) \in M_2[0,T]$. Dann ist $X(t,\omega) := X_0(\omega) + \int_0^t a(s,\omega)\,ds + \int_0^t b(s,\omega)\,dW(s)$ nicht-vorgreifend. Man sagt „(X_t) besitzt ein stochastisches Differential $dX(t) = a(t)\,dt + b(t)\,dW(t)$, $0 \le t \le T$.

12.6 Satz (Itô-Formel): Besitzt (X_t) das stoch. Differential $dX(t) = a(t)\,dt + b(t)\,dW(t)$ und besitzt $u: \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ die stetigen partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t}$, dann besitzt $Y_t := u(X_t, t)$ ebenfalls ein stochastisches Differential
$$dY(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(\,)\,dt + \frac{\partial u}{\partial x}(\,)\,dX(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\,)\,\frac{1}{2} b^2(t)\,dt = \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} a + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{1}{2} b^2\right] dt + \frac{\partial u}{\partial x}\, b\,dW$$

Bem. zum Beweis: Der unerwartete Term $\frac{1}{2} b^2 dt$ ergibt sich wie bei $Var\,B(t)$.

Bemerkung: Die Itô-Formel benutzt man bei sog. stochastischen Differentialgldg. $dX(t,\omega) = a(X_t, t, \omega)\,dt + b(X_t, t, \omega)\,dW(t)$, $t \in [0,T]$, $X(0) = X_0$, die unter Wachstums- und Lipschitz-Bedingungen für a und b eindeutig (P-f.s.) lösbar sind.

Stochastische Prozesse

Itô - Integral und Stratonovich - Integral

12.7 Das Itô - Integral kann man auch definieren durch

$$\int_0^T b(s)\, dW_s = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} b(t_n)(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}) ,$$

wobei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ mit $\Delta := \sup (t_{n+1} - t_n)$

Im Vergleich zum Riemann-Stieltjes-Integral fällt die Wahl von $b(t_n)$ auf.
Führt man statt $b(t_n)$ den Wert $b(\frac{t_n + t_{n+1}}{2})$ ein,
so erhält man das Stratonovich - Integral:

$$\int_0^T b(s) \circ dW_s = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} b\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}\right)(W_{t_{n+1}} - W_{t_n})$$

Daß die beiden Integral - Definitionen nicht übereinstimmen,
sieht man am folgenden Beispiel:

12.8 Beispiel: (I) $\int_0^T W_s\, dW_s = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} T$, (S) $\int_0^T W_s \circ dW_s = \frac{1}{2} W_T^2$

Beweis: (I): $\sum_{n=0}^{N-1} W_{t_n}(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2}(W_{t_{n+1}} + W_{t_n}) - \frac{1}{2}(W_{t_{n+1}} - W_{t_n})\right](W_{t_{n+1}} - W_{t_n})$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2}(W_{t_{n+1}}^2 - W_{t_n}^2) - \frac{1}{2}(W_{t_{n+1}} - W_{t_n})^2\right] = \frac{1}{2} W_{t_N}^2 - \frac{1}{2} W_{t_0}^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} (W_{t_{n+1}} - W_{t_n})^2 = \dots$$

Sei $t_{n+1} - t_n = \Delta = \frac{T}{N} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}) =: \underline{Z_n} \sim N(0,1)$, $E Z_n^2 = 1$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} (W_{t_{n+1}} - W_{t_n})^2 = \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Z_n^2 \xrightarrow{f.s.} T \cdot E Z_n^2 = T$ nach dem starken Gesetz der großen Zahlen.

$\dots \to \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} T.$

(S): Statt W_{t_n} steht hier $W_{\frac{1}{2}(t_n + t_{n+1})} = \frac{1}{2}(W_{t_{n+1}} + W_{t_n}) + \{W_{\frac{1}{2}(t_n + t_{n+1})} - \frac{1}{2}(W_{t_{n+1}} + W_{t_n})\}$.

Der Term $\{\ \}$ ist nach Konstr. st. unabh. von $W_{t_n}, W_{t_{n+1}}$ und $N(0, \frac{\Delta}{2})$-vert.

Also erhält man oben $\frac{T}{N} \sum_0^{N-1} Z_n' \cdot Z_n \xrightarrow{f.s.} T \cdot E Z_n' Z_n = T\, E Z_n' \cdot E Z_n = 0$ (mit $Z_n' := \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\{\ \}$)

Bemerkung: Anders geschrieben lautet (I) und (S):

(I): $W_T^2 = \int_0^T 2 W_s\, dW_s + T$ (S): $W_T^2 = \int_0^T 2 W_s \circ dW_s$

oder in differentieller Form:

(I'): $d(W_s^2) = 2 W_s\, dW_s + 1 \cdot ds$ (S'): $d(W_s^2) = 2 W_s \circ dW_s$.

Vorteil von „Stratonovich": Es gilt die „Kettenregel" (allg. vgl. Itô-Formel)

Nachteil — " — $\int_0^t b(s) \circ dW_s$ ist nicht $\mathcal{A}_t$-meßbar (i. allg.)

Anwendung von Itô-Integralen bei Diffusionsprozessen,
von Stratonovich-Integralen bei „glattem" weißem Rauschen.