Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 9: Abgabe: Donnerstag, 15. 01. 04

Aufgabe H 9.1:

Bestimmen Sie für ein Bediensystem M|M|∞ (beliebig viele Bediener, daher kein Warteraum), modelliert durch eine HMKS mit $I := \mathbb{N}_0$, $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = i \cdot \mu$,

(a) die stationäre (Kunden-)Verteilung,

(b) die stationäre Verteilung der „eingebetteten" Markov-Kette (Z_n).

(c) Zeigen Sie, dass für jeden GuT-Prozess (modelliert als HMKS) mit $\lambda_i = \lambda$, der eine stationäre Verteilung besitzt, die eingebettete Markov-Kette (Z_n) folgende stationäre Verteilung (ϱ_i) besitzt:

$$(\varrho_i = \tfrac{1}{2}(\pi_i + \pi_{i-1}),\ i \in \mathbb{N}_0), \text{ wobei } \pi_{-1} := 0.$$

Aufgabe H 9.2:

Bestimmen Sie für einen M|M|1|∞-Bedienprozess (X_t)

(a) den Ü-Graph für die eingebettete Markov-Kette (Z_n),

(b) wenn τ der Zeitpunkt der ersten Ankunft eines Kunden nach $t=0$ ist – und damit $X_{\tau-}$ die Zahl der Kunden unmitelbar davor –,

(b1) $P(X_{\tau-} = j | X_0 = i)$ $(\forall i, j)$ (mit (Z_k), Fälle $j > 0 / j = 0$, Skizzen!),

(b2) $P(X_{\tau-} = j)$ und $P(X_\tau = j)$ $(\forall j)$, falls (X_t) stationär ist.

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse von (b2) mit der stationären Verteilung von (X_t), insbesondere für den konkreten Fall $\mu = 2\,\lambda$.

Aufgabe H 9.3:

Sei $\mathcal{L}_2$ die Menge der quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen (mod P-f.s. =).
Sei $\mathbf{1}(\omega) := 1$ $\forall \omega$ (ZV!).

(a) Zeigen Sie, dass durch die Abbildung $(X, Y) \mapsto \, <X, Y> := EXY$ ein Skalarprodukt in $\mathcal{L}_2$ definiert wird.

(b) Wie hängen „unkorreliert" und „orthogonal" ($\perp$) zusammen?

(c) Welche der ZV X, $X - EX$ und $EX \cdot \mathbf{1}$ sind orthogonal? Wie verhalten sich ihre Längen $||X||, \ldots$ zueinander?

(d) Bestimmen Sie die Projektion Z von X auf Y. Geben Sie die Längen von X, der Projektion Z und des Lotes $L := X - Z$ an. Gilt $Z \perp L$?