

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 6:

Abgabe: Donnerstag, 11.12.03

Aufgabe H 6.1:

Bei einer zufälligen Summe $S := \sum_{i=1}^N Y_i$ ($N, Y_1, Y_2, \dots$ st.u.)
sei $Y_1, Y_2, \dots$ $\text{Exp}(\alpha)$ - und N $\text{Geo}^+(p)$ -verteilt ($\text{geo}^+(p; k) = p(1-p)^{(k-1)}$,
 $k = 1, 2, \dots, 0 < p < 1$).

Berechnen Sie die Verteilung von S auf zwei Wegen aus den folgenden:

- (a) mit Zerlegung nach den Werten von N ,
- (b) mit der Laplace-Transformation,
- (c) mit einer Zerlegung des zugehörigen $\text{Poisson}(\alpha)$ -Prozesses.

Aufgabe H 6.2:

- (a) Zeigen Sie, dass der stochastische Prozess $(X_{nh} := \sum_{i=1}^n W_i, n \in \mathbb{N}_0)$
mit u.i.v. Bernoulli(αh)-ZV W_i für kleine h einen Poisson-Prozess
approximiert. Überprüfen Sie dazu die Eigenschaften eines
Poisson-Prozesses (mit $t_i \in h\mathbb{N}_0$).
- (b) Zeigen Sie, dass die erste Ankunftszeit S_1 des Prozesses (X_{nh})
für $h \rightarrow 0$ näherungsweise exponential verteilt ist.
Was folgt daraus für die Verteilung von S_k ?

Aufgabe H 6.3:

- (a) Beweisen Sie Beispiel M.2 der Vorlesung:
Ist (X_t) ein Poisson-Prozess mit Parameter α und $(Y_n, n \in \mathbb{N}_0)$ eine
davon unabhängige homogene Markov-Kette mit diskreter Zeit und
Übergangsmatrix (r_{ij}) , so ist $(Z_t := Y_{X_t})$ eine homogene Markov-Kette
mit stetiger Zeit.

Hinweis: Zeigen Sie die Markov-Eigenschaft nur für $t_1 < t_2 =: s < t_3 =: s+t$
(Bezeichnungen z.B. $i_2 = i, i_3 = j, k_2 = m, k_3 = m+k$)
und zerlegen Sie z.B. $\{Z_s = i\}$ in $\sum_m \{X_s = m, Y_m = i\}$.

- (b) Wie lässt sich die zugehörige Übergangs-Matrix-Funktion $(p_{ij}(\cdot))$
mit Hilfe von (r_{ij}) ausdrücken? ($P(Y_{n+k} = j | Y_n = i) =: r_{ij}^{(k)}$).