

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 5:

Abgabe: Donnerstag, 4.12.03

Aufgabe H 5.1:

Für $t \in [0, \infty)$ sei X_t die Zahl der im Zeitintervall $[0, t]$ an einem Schalter eintreffenden Kunden, (X_t) sei ein Poisson-Prozess mit Parameter α .

Berechnen Sie die bedingte Verteilung der Zahl der im Zeitintervall

$(s, s+pt]$ mit $(s, s+pt] \subset [0, t]$ ($0 < p < 1$) eingetroffenen Kunden,

- (a) wenn im Intervall $[0, t]$ genau n Kunden eingetroffen sind,
- (b) wenn – alternativ – n Kunden unabhängig voneinander zu $\mathcal{R}(0, t)$ -verteilten Zeitpunkten angekommen sind?

Hinweis: Wenn Sie formale Schwierigkeiten haben, setzen Sie $s=0$. Skizze!

Aufgabe H 5.2:

Die ZV X, Y seien stoch. unabhängig und $\text{Exp}(\alpha)$ - bzw. $\text{Exp}(\beta)$ -verteilt und es sei $Z := \min(X, Y)$.

- (a) Bestimmen Sie die Verteilung von Z
 - (a1) durch direkte Berechnung der Verteilungsfunktion oder
 - (a2) durch Interpretation von X und Y als erste Wartezeiten S_1 und S'_1 zweier unabhängiger Poisson-Prozesse.
- (b) Zeigen Sie, dass $P(Z=X) = \alpha/(\alpha+\beta)$.
- (c) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von Z unter $\{Z=X\}$.
Was ergibt sich aus dem Vergleich der Ergebnisse von (a) und (c)?

Aufgabe H 5.3:

$(X_t^{(1)})$ und $(X_t^{(2)})$ seien zwei stoch. unabhängige Poisson(α)-Zählprozesse (mit isotonen Pfaden), $S_k^{(1)}$ bzw. $S_k^{(2)}$ seien die zugehörigen Sprungzeiten.

Der stochastische Prozess $(X_t, t \in \mathbb{R})$ sei definiert durch

$$X_t(\omega) := X_t^{(1)}(\omega) \quad \text{für } t \geq 0, \quad X_t(\omega) := -X_{-t}^{(2)}(\omega) \quad \text{für } t < 0.$$

Die Sprungstellen von (X_t) seien nummeriert durch

$$S_k(\omega) := S_k^{(1)}(\omega) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}^*, \quad S_k(\omega) := -S_{-k+1}^{(2)}(\omega) \quad \text{für } k \in -\mathbb{N}_0.$$

- (a) Skizzieren Sie einen möglichen Pfad von (X_t) und markieren Sie die Sprungstellen $S_{-2}, S_{-1}, S_0, S_1, S_2, S_3$.
- (b) Zeigen Sie, dass der Prozess (X_t) unabhängige und stationäre Zuwächse besitzt. (Welche Verteilung haben die Zuwächse?)
- (c) Bestimmen Sie die Verteilungen von $S_k - S_{k-1}$ ($k \in \mathbb{Z}$), insbes. für $k=1$.