Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 4: Abgabe: Donnerstag, 27. 11. 03

Aufgabe H 4.1:

In einem Bediensystem mit 1 Bediener (= 1 Bedienplatz) und 1 Warteplatz komme je Takt – unabhängig von den anderen Takten – entweder mit W. p ein Kunde an **oder** es geht mit W. q ein Kunde ab – falls einer da ist – oder es geschieht nichts (mit W. $r = 1-p-q$). Wenn beide Plätze belegt sind, geht ein ankommender Kunde ohne Bedienung ab.

(a) Skizzieren Sie den Ü-Graph.

(b) Für welche $p, q > 0$ existiert eine GGV? Wie lautet sie?

(c) Berechnen Sie im Gleichgewichtsfall die W., dass zwischen X_{n-1} und X_n
(c1) ein bedienter, (c2) ein unbedienter Kunde abgeht.

(d) Wieviele Kunden werden im Mittel je Takt bedient?

(e) Welchen Teil seiner Zeit (in %) hat der Bediener (im Mittel) nichts zu tun?

Aufgabe H 4.2:

Gegeben sei das Bediensystem aus Aufg. H 3.2 bzw. Bsp. 5.7.
(Dort gilt $0 < p_{i,i+1} = p < p_{i+1,i} = q$ mit der Annahme, dass in einem Takt **nicht** sowohl ein Kunde ankommen, als auch ein Kunde abgehen kann.)
Sie beobachten das System im Gleichgewicht, beginnend zum Zeitpunkt n_0.

(a) Sei Y die Zeit von n_0 bis zur nächsten Ankunft.
Bestimmen Sie zu Y (a1) die Z-Dichte, (a2) Mittelwert und Streuung, (a3) die Verteilungsfunktion. (Hinweis zu (a2): Ableitung von $\sum_n x^n$.)

Aufgabe H 4.3:

Sei $I = \{1,2,3,4,5\}$ und $\mathbf{P} := \begin{pmatrix} .4 & .0 & .0 & .6 & .0 \\ .0 & .6 & .0 & .0 & .4 \\ .2 & .0 & .5 & .0 & .3 \\ .5 & .0 & .0 & .5 & .0 \\ .0 & .7 & .0 & .0 & .3 \end{pmatrix}$ (vgl. Aufg. P 4.1).

(a) Zeichnen Sie den Ü-Graph (ohne Überschneidungen von Pfeilen).

(b) Bestimmen Sie die Matrix der Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$.

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von der Startverteilung $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)^T$
für alle $j \in I$ die Grenzwerte von $p_n(j) := P(X_n = j)$ für $n \to \infty$.

(d) Bestimmen Sie alle stationären Verteilungen.