

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 2:

Abgabe: Donnerstag, 13.11.03

Aufgabe H 2.1:

Modellieren Sie die Warteschlangenlänge an einem einsitzigen Sessellift (jeweils kurz vor der Abfahrt eines Sessels) als homogene Markov-Kette (X_n) , wenn die (zufällige) Anzahl der in einem Takt (= zwischen zwei Abfahrten) ankommenden Personen $\text{binomial}(2, \alpha)$ -verteilt ist ($0 < \alpha < 1$, $\delta := 1 - \alpha$).

- (a) Geben Sie I und $\mathbf{P}$ an, dazu auch den $\ddot{U}$ -Graph.
- (b) Vergleichen Sie mit Beispiel 3 aus Abschnitt 4. Wo sind Unterschiede?
- (c) Überprüfen Sie mit Satz 4.7 (und $i_0 = 0$) für welche Werte von α der Zustand $i = 0$ rekurrent bzw. transient ist. Was folgt für $i > 0$?
Wie wirken sich die Unterschiede zu Beispiel 3 aus?

Aufgabe H 2.2:

- (a) Beweisen Sie die folgende Aussage aus Satz 4.7 der Vorlesung (Hinweis „ $f_{i_0 i_0}^* = \dots$ “):
Sei $K(i)$ abgeschlossen, $i_0 \in K(i)$. Dann gilt:
(*) $K(i)$ transient $\iff \exists j \in K(i), j \neq i_0$ mit $f_{j i_0}^* < 1$.
- (b) Warum wird (in (a)) die Voraussetzung „ $K(i)$ abgeschlossen“ benötigt?
Konstruieren Sie ein (möglichst einfaches) Beispiel, in dem $K(i)$ *nicht* abgeschlossen ist und die Folgerung (*) aus (a) *nicht* gilt.

Aufgabe H 2.3: (Eigenschaften von Stoppzeiten)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, $T = \mathbb{N}_0$ und $(\mathcal{A}_n, n \in T)$ eine aufsteigende Folge von σ -Algebren (eine Filtration) in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

- (a) Eine ZV $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist genau dann eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{A}_n)$ ist, wenn $\{\tau = n\} \in \mathcal{A}_n \forall n$.
- (b) Sind τ_1, τ_2 Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{A}_n)$, dann sind auch $\max(\tau_1, \tau_2)$, $\min(\tau_1, \tau_2)$ und $\tau_1 + \tau_2$ Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{A}_n)$.
- (c) Ist $(X_n : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{B}), n \in T)$ ein $(\mathcal{A}_n)$ -adaptierter stoch. Prozess und $B \in \mathcal{B}$, dann ist $\tau_B := \inf\{n \in T, X_n \in B\}$ eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{A}_n)$.