Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 11: Abgabe: Donnerstag, 29. 1. 04

Aufgabe H 11.1:

Die Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 seien gemeinsam normalverteilt mit der Darstellung

$$Y_1 = a_1 + a_{11}\,X_1 + a_{12}\,X_2 \qquad Y_2 = a_2 + a_{21}\,X_1 + a_{22}\,X_2,$$

wobei X_1, X_2 stoch. unabhängig und $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt seien.

(a) Bestimmen Sie $E(Y_2|Y_1)$ im Fall $a_{12}=0$. Beachten Sie dabei die Abhängigkeiten und Unabhängigkeiten der beteiligen Zufallsvariablen, z.B.: Lässt sich Y_2 durch Y_1 und ? ausdrücken?

(b) Drücken Sie im Ergebnis von (a) alle Koeffizienten (soweit möglich) durch EY_i, $\operatorname{Str} Y_i$ und $\operatorname{Kov}(Y_1, Y_2)$ aus.

(c) Zeigen Sie, dass auch für $a_{12} \neq 0$ eine Darstellung wie in (a) existiert, indem Sie die Matrix $\mathbf{A} := (a_{ij})$ durch $\mathbf{AO}^T$ ersetzen, wobei die Zeilen von $\mathbf{O}$ durch Orthonormierung aus $\mathbf{A}$ entstehen. (Vereinfachen Sie größere Ausdrücke durch Abkürzungen.)

Aufgabe H 11.2: ((Super-)Martingale und Stoppzeiten, vgl. H 2.3)

Gegeben sei ein (Super-)Martingal (X_t) bzgl. $(\mathcal{A}_t,\ t \in I)$ mit $I = \{1, \ldots, m\}$ (I endlich!) und zwei Stopzeiten S und T bzgl. $(\mathcal{A}_t)$ mit $S \le T$.

(a) Zeigen Sie, dass $S_k := \min(S+k, T)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, eine aufsteigende Folge von Stoppzeiten bildet mit $S_{k+1} - S_k \le 1$.

(b) Zeigen Sie für $T - S \le 1$, dass $E(X_T - X_S \mid \mathcal{A}_S) = 0$ (bzw. $\le$ 0).

Hinweis: Zerlegen Sie $X_T - X_S$ mit $\Omega = \sum_1^m \{S=i\}$ und zeigen Sie, dass für $A \in \mathcal{A}_S$ gilt: $A \cap \{S=i\} \cap \{T > S\} \in \mathcal{A}_i$.