

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 10:

Abgabe: Donnerstag, 22. 1. 04

Aufgabe H 10.1:

Zeigen Sie für die Situation von Aufgabe H 5.2

– X, Y st.u., $\text{Exp}(\alpha)$ - bzw. $\text{Exp}(\beta)$ -verteilt und $Z := \min(X, Y)$ –
ebenso wie dort in Teil (b), dass $P(Z=X) = \alpha/(\alpha+\beta)$,

und zwar mit $B := \{Z=X\}$ (**korrr!**), $P(B) = E(1_B)$, dem bedingten Erwartungswert unter Y und unter $Y=y$ und Elimination von Z .

Geben Sie jeweils an, welchen Satz oder welche Eigenschaft Sie benutzen.

Aufgabe H 10.2:

Eine Bank will eine Option für ein Aktienpaket absichern.

Das Aktienpaket besitze zur Zeit $t=0$ einen Wert X_0 .

Die Bank kenne die Verteilung des Wertes $X_1 = X_0 + \Delta X$ zur Zeit $t=1$

Zur Zeit $t=0$ kauft Sie x Dollar zum Preis B_0 und verkauft sie wieder zur Zeit $t=1$ zum Preis $B_1 = B_0 + \Delta B$.

- (a) Für welche Menge $x = x^*$ wird $\text{Var}Z$ minimal – mit $Z :=$ „Differenz von Aktiengewinn und Dollargewinn“? Welchen Wert hat dann EZ ?
- (b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen x^* und Orthogonalprojektion?

Aufgabe H 10.3:

Gegeben sei ein stochastischer Prozess $(X_t, t \in \mathbb{N}_0)$, adaptiert an $(\mathcal{A}_t)$ (d.h. X_t ist $\mathcal{A}_t$ -messbar) mit integrierbaren Zufallsvariablen X_t .

Es sei $\tilde{X}_t := \sum_{n=0}^{t-1} [E(X_{n+1}|\mathcal{A}_n) - X_n]$

und $Y_t = X_0 + \sum_{n=0}^{t-1} [X_{n+1} - E(X_{n+1}|\mathcal{A}_n)]$.

- (a) Zeigen Sie $Y_t := X_t - \tilde{X}_t$.
- (b) In welchem Sinne ist $(\tilde{X}_t)$ „vorhersagbar“?
- (c) Zeigen Sie: $E(Y_t|\mathcal{A}_s) = Y_s$ für $0 \leq s < t$, $s, t \in \mathbb{N}_0$, zunächst für $t = s+1$.