

Übungen zu Stochastische Prozesse I

Hausaufgabenblatt 1:

Abgabe: Donnerstag, 6. 11. 03 (i. d. Vorl.)

Aufgabe H 1.1:

Die HMK (X_n) sei gegeben durch $I = \{0, 1\}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$
und $\mathbf{p}_0 = (1-c, c)$.

- (a) Berechnen Sie $\mathbf{p}_n$ für $n = 1, 2, 3$ und für allgemeines n in der Form $\mathbf{p}_n = \mathbf{p} + d^n \mathbf{p}'$, z.B. mit einer Rekursion $\mathbf{p}_n(1) = \alpha + \beta \mathbf{p}_{n-1}(1)$.
- (b) Für welche $a, b \in [0, 1]$ gibt es
 - (b1) einen von $\mathbf{p}_0$ unabhängigen Grenzwert? (welchen?)
 - (b2) einen von $\mathbf{p}_0$ abhängigen Grenzwert? (welche?)
 - (b3) nur für gewisse $\mathbf{p}_0$ einen Grenzwert? (welche(n)?)

Zusatzaufgabe (ohne Bewertung):

- (c) Vergleichen Sie mit den Eigenwerten und (linken) Eigenvektoren von $\mathbf{P}$.

Aufgabe H 1.2:

Beweisen Sie für eine HMK und eine (nichtleere) abgeschlossene Menge $I' \subset I$:

- (a) I' enthält nur vollständige Klassen, d.h. es gibt keine Klasse in I , die teilweise in I' , teilweise in $I \setminus I'$ liegt.
- (b) Falls I' endlich ist, dann gilt (Fol. 3.5 (d) der Vorlesung):
 I' enthält mindestens eine abgeschlossene Klasse.
- (c) Warum wird in (b) die Voraussetzung „endlich“ benötigt?

Aufgabe H 1.3:

Gegeben sei das Wartungs-/Reparatur-Problem Beisp. 4 der Vorlesung:

Ein Bauteil arbeite maximal 5 „Takte“, danach werde es gewartet.

Wenn es vorher ausfällt, finde eine Reparatur statt, die – ebenso wie die Wartung – zu Beginn des nächsten Taktes beendet sei. Nach Wartung oder Reparatur entspreche der Zustand des Bauteils dem Alter 1.

Es sei $I := 0, 1, 2, 3, 4$. Die (bedingte) Ausfall-W. bei Alter $i = 0, 1, 2, 3, 4$ sei $0.0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.6$.

- (a) Skizzieren Sie den Übergangs-Graph mit Angabe der p_{ij} an den Pfeilen.
- (b) Berechnen Sie (b1) $f_{13}^{(n)}$ für $n = 1, 2, 3, 4$, (b2) f_{13}^* , (b3) m_{13} ,
außerdem nur die hierzu benötigten $f_{ij}^{(n)}$, f_{ij}^* und m_{ij} .