Bedingter Erwartungswert und bed. Wahrscheinlichkeit

Satz E7

Für $X_0 : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ und $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{D})$ (messbar) gilt: Ist X_0 $\mathcal{A}(Y)$-$\mathcal{B}$-messbar, dann gibt es eine $\mathcal{D}$-$\mathcal{B}$-messbare Abbildung $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ mit $X_0 = g(Y)$ und umgekehrt.

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathcal{A}) \arrow[r, "Y"] \arrow[dr, "X"'] & (\mathcal{Y}, \mathcal{D}) \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, "\circ"] \\
& (\mathcal{X}, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

__Beweisidee:__ „⇒": 4 Stufen wie bei der Def. des Maß-Integrals

1. Stufe $X_0 = 1_{C_0}$, $C_0 \in Y^{-1}(\mathcal{D}) \Rightarrow C_0 = Y^{-1}(D_0)$

Setze $g_0(y) := 1_{D_0}(y)$ $(y \in Y) \Rightarrow \underline{X_0(\omega)} = 1_{Y^{-1}(D_0)}(\omega) = 1_{D_0}(Y(\omega)) = \underline{g_0(Y(\omega))}$

2. Stufe $X_0 = \sum_{i=1}^{m} a_i 1_{C_i}$, $C_i = Y^{-1}(D_i) \Rightarrow g_0 := \sum_{i=1}^{m} a_i 1_{D_i}$ erfüllt $X_0 = g_0 \circ Y$

3. Stufe $X_0 = \lim_{n \to \infty} X_0^{(n)} (\uparrow)$ sei $g_0 := \lim g_0^{(n)} (\uparrow) \Rightarrow X_0 = g_0(Y)$.

4. Stufe $X_0 = X_0^+ - X_0^- \Rightarrow X_0^{\pm}$ ist $\mathcal{A}(Y)$ messb. $(\{X_0 \geq 0\} = \tilde{C}_0 \in \mathcal{A}(Y))$

$\Rightarrow \exists g_0^+ : g_0^+(Y) = X_0^+$, $\exists g_0^- : \cdots \Rightarrow g_0 := g_0^+ - g_0^-$, $g_0(Y) = X_0$.

__Folgerung E8__ („Faktorisierung" von $E(X|Y)$)

Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathbb{B}})$, P-quasi-int. Dann ex. zu $E(X|Y)$ ($\mathcal{A}(Y)$-messbar!) eine Abb. $g = E(X|Y=\cdot) : (\mathcal{Y}, \mathcal{D}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathbb{B}})$ mit $E(X|Y) = g(Y) = E(X|Y=\cdot) \circ Y$.

__Folgerung E9__: Sei $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{D})$ (mb), $B \in \mathcal{A}$.

Dann definiert man $P(B|Y) := E(1_B|Y)$ und es ex. $P(B|Y=y) := E(1_B|Y=y)$ und es gilt $P(B|Y) = P(B|Y=\cdot) \circ Y$.

__Frage:__ Ist $(y, B) \to P(B|Y=y)$ ein Ü-W-Maß?

Für festes $B \in \bar{\mathbb{B}}$ ist $P(B|Y=\cdot)$ $\mathcal{D}$-$\bar{\mathbb{B}}$-messbar

Für $y \in N_B^c$ ist $P(B|Y=y) \geq 0$, $P(\Omega|Y=y) = 1$.

Für $y \in \bigcap N_{B_i}^c$ ist $P(\sum_1^{\infty} B_i | Y=y) = \sum_1^{\infty} P(B_i|Y=y)$ wg. Linearität f. $\sum_1^{n} B_i$ (2) und mon. Konv. (7a).

also ist $P(\cdot|Y=y)$ f. P-fast alle y ein W-Maß (?)

Man braucht dazu, dass $\mathcal{A}$ einen abzählbaren Erzeuger besitzt, z.B. $\mathcal{A} = \mathbb{B}^k$.

__Folgerung__ E10: Ist $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{D})$ (mb) $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ (mb), $\mathcal{B}$ mit abz. Erz.

Dann ex. ÜW-Maß $P^{(X|Y=\cdot)}$ mit $P^{(Y,X)} = P^Y \otimes P^{X|Y=\cdot}$

Beweis: $P^{(X|Y=\cdot)}(y, B) = P(X^{-1}(B)|Y=y)$, weiter mit E9.