Gerhard Hübner
Universität Hamburg, Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Mathematische Statistik und Stochastische Prozesse

Stochastische Prozesse I

Bedingte Erwartungswerte und Orthogonal-Projektion in $\mathcal{L}_2(\mathcal{A})$

Definition E.5:
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, $\mathcal{A}'$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$
und es sei $L_2(\mathcal{A}) := \{X : \Omega \to \overline{I\!R} \,|\, X$ ist quadratisch integrierbar u. $\mathcal{A}$-messbar$\}$,
Dann heißt $\underline{\mathcal{L}_2(\mathcal{A})} := L_2(\mathcal{A})$ modulo „P-f.s.=“ – als Menge von Repräsentanten –
der $\underline{\mathcal{L}_2\text{-Raum}}$ über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, auch geschrieben als $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Entsprechend sei $\mathcal{L}_2(\mathcal{A}')$ definiert mit Messbarkeit bzgl. $\mathcal{A}'$.

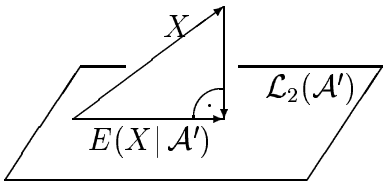
Außerdem definiert man für $X, Y \in \mathcal{L}_2(\mathcal{A})$:

$$\begin{aligned} <X,Y> &:= E(XY), && \text{ein Skalarprodukt (s. Folg. (b))},\\ ||X|| &:= <X,X>^{1/2}, && \text{die zugehörige Norm auf } \mathcal{L}_2(\mathcal{A}),\\ X \perp Y &:\Leftrightarrow <X,Y> = 0, && \text{die zugehörige Orthogonalität.}\end{aligned}$$

Folgerung E.6:
(a) $\mathcal{L}_2(\mathcal{A})$ und $\mathcal{L}_2(\mathcal{A}')$ sind Vektorräume mit $\mathcal{L}_2(\mathcal{A}') \subset \mathcal{L}_2(\mathcal{A})$.

(b) $(X,Y) \mapsto <X,Y>$ ist Skalarprodukt in $\mathcal{L}_2(\mathcal{A})$, insbesondere ist XY integrierbar.
(Aus $<X,X> = 0$, also $E(X^2) = 0$, folgt nur „$X = 0$ P-f.s.“, deshalb $\mathcal{L}_2$ statt L_2.)

(c) $E(X|\mathcal{A}')$ ist die Orthogonal-Projektion von X $(\in \mathcal{L}_2(\mathcal{A}))$ auf $\mathcal{L}_2(\mathcal{A}')$,
d.h. für $X \in \mathcal{L}_2(\mathcal{A})$ gilt
(c1) $E(X|\mathcal{A}') \in \mathcal{L}_2(\mathcal{A}')$ und
(c2) $X - E(X|\mathcal{A}') \perp Y$ für alle $Y \in \mathcal{L}_2(\mathcal{A}')$.



(d) $||X - E(X|\mathcal{A}')|| = \min\{||X - Y|| : Y \in \mathcal{L}_2(\mathcal{A}')\}$, $X \in \mathcal{L}_2(\mathcal{A})$.

(e) Für $\mathcal{A}' = \{\emptyset, \Omega\}$ ist $E(X|\mathcal{A}') = EX \cdot \mathbb{1}$ M (mit $\mathbb{1} : \omega \mapsto 1$).
Für $\mathcal{A}' = \sigma(Z)$ mit $Z : \Omega \to \Omega'$, mb., ist $\mathcal{L}_2(\mathcal{A}') = \{g(Z)$ mit $g : \Omega' \to \overline{I\!R}$, mb., $g(Z)$ qu.int. $\}$.

Beweis (soweit nicht direkt ersichtlich):
Zu (b): $E|XY| < \infty$ folgt aus $E|XY| \le E(\max(X^2, Y^2)) \le E(X^2 + Y^2) < \infty$.
Zu (c1): Z.z. $E\,(E(X|\mathcal{A}')^2) < \infty$.
Definiert man $\mathrm{Var}(X|\mathcal{A}) := E\,([X - E(X|\mathcal{A}')]^2|\mathcal{A}')$ wie $\mathrm{Var}X$,
dann gilt $\mathrm{Var}(X|\mathcal{A}) = E(X^2|\mathcal{A}') - E\,([E(X|\mathcal{A}')]^2|\mathcal{A}') \ge 0$.
Daraus folgt (mit $E(E(Y|\mathcal{A}')) = EY$) $E(\mathrm{Var}(X|\mathcal{A})) = E(X^2) - E\,([E(X|\mathcal{A}')]^2) \ge 0$, $(*)$
also $||E(X|\mathcal{A}')||^2 = E\,(E(X|\mathcal{A}')^2) \le E(X^2) < \infty$.
Außerdem folgt aus $(*)$ $E\,([X - E(X|\mathcal{A}')]^2) = E(\mathrm{Var}(X|\mathcal{A})) \le E(X^2) < \infty$.
Zu (c2) $E\,([X - E(X|\mathcal{A}')] \cdot Y) = E\,\{E\,([X - E(X|\mathcal{A}')] \cdot Y|\mathcal{A}')\} =$
$= E\,\{Y \cdot E\,(X - E(X|\mathcal{A}')|\mathcal{A}')\}$ weil Y $\mathcal{A}'$-messbar ist
$= 0$ wegen $E\,(X - E(X|\mathcal{A}')|\mathcal{A}') = E(X|\mathcal{A}') - E(X|\mathcal{A}') = 0$.
Zu (d): Sei $X_0 := E(X|\mathcal{A}')$. Dann gilt $||X - Y||^2 = E(X - Y)^2 = E\,((X - X_0) + (X_0 - Y))^2$
$= E(X - X_0)^2 + 2E\,((X - X_0)(X_0 - Y)) + E(X_0 - Y)^2$.
Der mitttlere Ausdruck ist $= 0$ nach (c2), der letzte ≥ 0, also gilt (d).