

Stochastische Prozesse I

E Bedingte Erwartungswerte

Vorbemerkung: Zu einer bedingten Verteilung $P^{(X|Y=\cdot)}$ definiert man

$$E(X|Y=\cdot) = \int x P^{(X|Y=\cdot)}(dx), \text{ falls } X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}}) \text{ } P\text{-quasi-integrierbar.}$$

Wir betrachten hier $E(X|Y) := E(X|Y=\cdot) \circ Y$, eine $\sigma(Y)$ - $\overline{\mathbb{B}}$ -messbare ZV,
und deren Verallgemeinerung $E(X|\mathcal{C})$, wobei $\mathcal{C}$ eine Unter- σ -Algebra von $\mathcal{A}$ ist,
mit dem Spezialfall $E(X|Y) := E(X|\sigma(Y))$.

Beispiel E.1: Sei $\mathcal{C} := \sigma(\{B_1, B_2, \dots\})$ mit $\Omega = \sum_{i=1}^{n[\infty]} B_i$,

X P -quasi-integrierbar.

Dann definiert man $E(X|\mathcal{C}) := \sum_{i=1}^{n[\infty]} [E(X \cdot 1_{B_i}) / P(B_i)] \cdot 1_{B_i}$.

Daraus folgt $\omega \mapsto E(X|\mathcal{C})(\omega)$ ist $\mathcal{C}$ -messbar,

und es gilt $\int_C f(\cdot) dP = \int_C X dP \quad \forall C \in \mathcal{C}$ (hier $C = \sum_j B_{k_j}$).

Satz E.2: Ist $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$ P -quasi-integrierbar, $\mathcal{C}$ eine Unter- σ -Algebra von $\mathcal{A}$,
dann existiert ein $X_0 : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$ – bis auf „ P -f.s.“ eindeutig – mit

$$(*) \quad X_0 \text{ ist } \mathcal{C}\text{-messbar und } \int_C X_0 dP = \int_C X dP \quad \forall C \in \mathcal{C}.$$

Beweisidee: Das Maß Q auf $(\Omega, \mathcal{C})$, definiert durch $Q(C) := \int_C X dP$ ist „stetig“
bzgl. $P_0 := P|_{\mathcal{C}}$, d.h. mit $P(C)=0$ ist auch $Q(C)=0$. Daraus folgt mit dem Satz
von Radon-Nikodym, dass Q eine $\mathcal{C}$ -messbare, P -f.s. eindeutige P_0 -Dichte X_0 besitzt.

Definition E.3: Jede der nach Satz E.2 existierenden Zufallsvariablen X_0 heißt
bedingter Erwartungswert von X unter $\mathcal{C}$. Man schreibt $E(X|\mathcal{C}) := X_0$,
ohne Berücksichtigung der verschiedenen, aber P -f.s. gleichen Versionen von X_0 .

Folgerung E.4 – Eigenschaften von $E(X|\mathcal{C})$. Diese gelten alle (nur) P -f.s.

- (1) $E(X|\{\emptyset, \Omega\}) = EX$, $E(X|\mathcal{A}) = X$. [Dies folgt direkt durch Einsetzen in (*).]
- (2) $E(aX + bY|\mathcal{C}) = aE(X|\mathcal{C}) + bE(Y|\mathcal{C})$. [Die Integrale in (*) sind linear.]
- (3) $a \leq X \leq b \Rightarrow a \leq E(X|\mathcal{C}) \leq b$. [Man setze $C := \{E(X|\mathcal{C}) < a\}$ in (*).]
- (4) Sei $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{A} \Rightarrow E[E(X|\mathcal{C}_2)|\mathcal{C}_1] = E(X|\mathcal{C}_1)$, speziell $E(E(X|\mathcal{C})) = EX$.
- (5) $E(XY|\mathcal{C}) = XE(Y|\mathcal{C})$, falls X $\mathcal{C}$ -messbar. Speziell $E(E(X|\mathcal{C}) \cdot Y|\mathcal{C}) = E(X|\mathcal{C}) \cdot E(Y|\mathcal{C})$.
- (6) $E(X|\mathcal{C}) = EX$, falls $X, \mathcal{C}$ st.u., d.h. falls $X, 1_C$ st.u. für alle $C \in \mathcal{C}$.
- (7) Majorisierte Konvergenz: $X_n \rightarrow X$, $|X_n| \leq Y$, Y integrierbar $\Rightarrow E(X_n|\mathcal{C}) \rightarrow E(X|\mathcal{C})$.
- (8) Jensensche Ungleichung: (s. z.B. Hinderer 25.10)

Sei $M \subset \mathbb{R}^d$, $\neq \emptyset$, konvex, $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, messbar,

$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$ integr. mit $P^Y(M)=1$. Dann gilt:

- (a) $EX \in M$ (sogar $EX \in M^{\text{off}}$, falls P^X nicht auf Hyperebene).
- (b) $E(g \circ X)$ ex., $g(EX) \leq E(g \circ X)$, $g(E(X|\mathcal{C})) \leq E(g \circ X|\mathcal{C})$.

Beweis(-Ideen): Zu (4): Sei $\widetilde{X} := E(X|\mathcal{C}_2)$, $\widetilde{X}_0 := \ell.S.$, $C \in \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \Rightarrow \int_C \widetilde{X}_0 dP$

$$\stackrel{(*)}{=} \int_C E(X|\mathcal{C}_2) dP \stackrel{(*)}{=} \int_C X dP \stackrel{(*)}{=} \int_C \widetilde{X}_0 = E(X|\mathcal{C}_1) \quad (\text{mit } (*) \text{ für } C \in \mathcal{C}_1 / C \in \mathcal{C}_2 / C \in \mathcal{C}_1).$$

Zu (5): Mit (*), z.z.: $\int_C X E(X|\mathcal{C}) dP = \int_C X Y dP$ (Beweisprinzip für Integrale).

Zu (6): Mit (*): $\int X 1_C dP \stackrel{\text{st.u.}}{=} EX \cdot E 1_C = \int EX \cdot 1_C dP = \int_C EX dP = \ell.S.$

Zu (8): Sei $K := \{(\omega, y) : \omega \in M, y \geq g(\omega)\} \Rightarrow \exists$ Hyperebene H durch $(EX, g(EX))$ mit $g \geq H$
 $\Rightarrow E(g \circ X) \geq E(H \circ X) = H(EX) = g(EX)$.