

§ 11 Der Brownsche Prozeß

Geschichte: 1827 beobachtet Robert Brown die Molekularbewegung.

Um 1900 versuchen Bachelier und Einstein die mathematische Beschreibung.

1923 gelingt Norbert Wiener das erste exakte Modell.

Motivation: Ist X_t der Ort des Teilchens zur Zeit t , so ist $(X_t, t \in T \subset \mathbb{R})$ ein stochastischer Prozeß. Es ist sinnvoll, $T = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ und $X_0 = 0$ zu setzen.

Aus der Annahme vieler kleiner Stöße folgt für X_t die Normal-Verteilung.

Wegen starker Viskosität (innerer Dämpfung) kann man annehmen, daß die Verschiebungen in disjunkten Intervallen unabhängig sind.

Aus Symmetrie-Betrachtungen folgt $EX_t = 0$ für alle t .

Die Verschiebung $X_{t+s} - X_t$ soll nicht von t abhängen. Daraus folgt $X_{t+s} - X_t \sim N(0, f(s))$.

Wegen der Unabh. der "Zuwächse" folgt $f(s+t) = f(s) + f(t)$ und damit $f(s) = b \cdot s$.

Schließlich sollen aus physikalischen Gründen die Pfade $t \mapsto X_t(\omega)$ stetig sein.

Definition: Ein Brownscher Prozeß (oder Wiener-Prozeß) ist ein stochast.

Prozeß $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ mit (1) $X_0 = 0$ p.f.s., (2) (X_t) besitzt unabh. Zuwächse,

(3) $\mathcal{L}(X_{t+s} - X_t) = N(0, bs)$ $\forall s, t \geq 0$, (4) Fast alle Pfade sind stetig in t . $\left\| \begin{array}{l} \text{Standard} \\ b=1 \end{array} \right.$

Existiert ein solcher Prozeß? Ohne (4) können wir d. Sels'v. Kolmogorov heranziehen (vgl. MP).

Wir betrachten zuerst den anschaulichen Zugang nach Wiener (s. Lamperti, Kap. 4)

Der Prozeß wird aus "Zuwachsfunktionen" mit $N(0,1)$ -Gewichten zusammengesetzt:

$X_t(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\omega) \psi_n(t)$ mit $A_n \sim N(0,1)$, $\psi_0(t) = t$, $\psi_1(t) = \begin{cases} t-1 & \text{für } t \in [1,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (zunächst auf $[0,1]$)

Allgemein: $\psi_{2^m+k}(t) = \begin{cases} t-2^m & \text{auf } [2^m, 2^{m+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit der Höhe $\frac{1}{2^m} \sqrt{2^{-m}}$, $\begin{cases} m=0,1,\dots \\ k=0,1,\dots,2^m-1 \end{cases}$

11.1 Satz: Die Reihe für X_t konvergiert p.f.s. und $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ ist ein Brownscher Prozeß (b+g).

Eigenschaften des Brownschen Prozesses (X_t) : (im folg. $b=1$)

11.2 Folgerung: (a) (X_t) besitzt die "Kovarianzfunktion" $E(X_s X_t) = \min(s, t)$ (2').

(b) (X_t) ist Br. Proz. $\Leftrightarrow$ (1'), (2'), (3') $P(X_1, \dots, X_n)$ sind Normal-Vert., (4). [(3') = Gauss-Prozeß]

11.3 Satz: Es gilt das globale und das lokale Gesetz vom iterierten Logarithmus:

$P(\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq t} X_s / \sqrt{2t \log \log t} = +1) = 1$, $P(\lim_{h \downarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq h} (X_{t+h} - X_t) / \sqrt{2h \log \log h^{-1}} = +1) = 1$.

11.4 Satz: Der Prozeß (Y_t) mit $Y_0 = 0$, $Y_t = t \cdot X_{1/t}$ ($t > 0$) ist ein Brownscher Prozeß.

(Basis mit Folg. 11.2 (b). Zu (2'): $X_n = X_{1/n} + (X_n - X_{1/n})$, zu (3') $(Y_1, \dots, Y_n) = B(X_1, \dots, X_n)$, stetig in 0!)

11.5 Satz: (X_t) besitzt für jedes $t_0 \geq 0$ und jedes $h > 0$ in (t_0, t_0+h) ∞ viele Nullstellen von $X_{t+h} - X_{t_0}$.

11.6 Satz: (a) $P(X'_t \text{ existiert}) = 0 \forall t$ (b) $P(\{\omega: \lambda(\{t: X'_t(\omega) \text{ existiert}\}) > 0\}) = 1$ (!)

(b) heißt: "Fast jeder Pfad von (X_t) ist λ -fast nirgends differenzierbar."

Beweis: (a) Da $\mathcal{L}(\frac{1}{n}(X_{t+h} - X_t)) = N(0, \frac{1}{n})$, gilt $P(|\frac{1}{n}(X_{t+h} - X_t)| \leq M) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) $\forall M$.

(b) Sei $f(\omega, t) = 1$, falls $X_t(\omega)$ diffbar in t , sonst $= 0$. Falls f meßbar in (ω, t) , folgt mit

Satz von Fubini $E(\int_0^\infty f(\cdot, t) dt) = \int_0^\infty E(f(\cdot, t)) dt = 0$, also $P(\int_0^\infty f(\cdot, t) dt > 0) = 1$.

Die Meßbarkeit von $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ folgt aus der Pfadstetigkeit, die von f mit D^+, D^- .

Bemerkung 11.1: Aus Satz 11.6 folgt, daß fast jeder Pfad von (X_t) nicht von be =

beschränkter Variation ist und damit auch nicht rektifizierbar, d.h.

der zurückgelegte Weg eines Teilchens hat keine endliche Länge. Dies gilt

so auch für mehrdimensionale Brownsche Prozesse.

(Eine Abb. von beschränkter Variation ist fast überall differenzierbar.)

Ergänzungen zu Brownschen Prozessen

11.12 Satz (Verteilung des Maximums eines Brownschen Prozesses):

Ist (X_t) Brownscher Prozeß und $M_t := \max_{0 \leq s \leq t} X_s$, so gilt

$$P(M_t \geq a) = 2 P(X_t \geq a) = P(|X_t| \geq a) \quad a > 0.$$

Beweis: Am anschaulichsten ist der Beweis mit dem Spiegelungsprinzip und der starken Markov-Eigenschaft: Sei $\tau_a := \inf\{t: X_t = a\}$.

Dann ist τ_a Stopp-Zeit bzgl. X_t : d.h. $[\tau_a \leq t] \in \mathcal{G}(X_u, 0 \leq u \leq t)$.

Wenn gezeigt ist, daß für (X_t) die starke Markov-Eigenschaft gilt, dann ist der Prozeß $(Y_t) = (X_{\tau_a+t} - X_{\tau_a})$ ebenfalls ein Brown-Prozeß, unabhängig von $(X_u, u \leq \tau_a)$ ($X_{\tau_a} = a!$). Der Prozeß (X_t) wird nun nach der Zeit τ_a an $x=a$ gespiegelt. Dadurch ändert sich die Verteilung des Prozesses nicht.

Also gilt $P(X_t > a | \tau_a \leq t) = P(X_t < a | \tau_a \leq t)$ und $P(X_t = a) = 0$.

Daraus folgt $P(M_t \geq a) = P(\tau_a \leq t) = P(\tau_a \leq t, X_t \geq a) + P(\tau_a \leq t, X_t < a) = P(\tau_a \leq t, X_t \geq a) + P(\tau_a \leq t, X_t > a) = 2 P(\tau_a \leq t, X_t \geq a) = 2 P(X_t \geq a)$.

Bemerkung 11.4: Die starke Markov-Eigenschaft gilt für jeden Prozeß mit unabhängigen und stationären Zuwächsen (s. z. B. Gässler-Stute S. 304).

Bemerkung 11.5: Das Spiegelungsprinzip gilt für beliebige Stoppzeiten τ : $X_t' := X_t$, falls $0 \leq t \leq \tau$, $= 2X_\tau - X_t$, falls $t > \tau$ ist wieder ein Brownscher Prozeß (s. Gässler-Stute S. 304, dort ohne Beweis, Hinweis auf Freedman (1941)).

Andere Zugänge zum Brownschen Prozeß:

1. Man betrachtet eine symmetrische Trafahrt auf den Zeitpunkten $n \cdot h$ mit den Sprunghöhen $\pm \sqrt{h}$ und läßt h gegen 0 gehen.
2. Man betrachtet L_2 -Prozesse, d.h. Prozesse (X_t) mit endlicher Varianz (dann ist auch $\text{Kov}(X_s, X_t)$ endlich), speziell die Gauß-Prozesse, bei denen jede endl.-dim. Verteilung eine Normalverteilung ist. Ein Gauß-Prozeß ist bereits durch die Kovarianzfunktion bestimmt. Der Brownsche Prozeß ist dann ein Spezialfall mit $\text{Kov}(X_s, X_t) = \min(s, t)$.

Vom Brownschen Prozeß abgeleitete Prozesse:

Ist (X_t) ein Brownscher Prozeß, so heißt $(Y_t, t \in [0, 1])$ mit $Y_t := X_t - tX_1$ eine Brownsche Brücke. Man erhält diese auch, wenn man bei dem Zugang nach Wiener den ersten Summanden wegläßt.

Ist (Y_t) eine Brownsche Brücke, so ist $(X_t' := (1+t)Y_{\frac{t}{1+t}})$ ein Brown-Prozeß. Die Brownsche Brücke hat die Kovarianzfunktion $\text{Kov}(Y_s, Y_t) = \min(s, t) - st$.

Bemerkung 11.6: Man kann über den Brownschen Prozeß zufällige Integrale einführen, sog. Ito-Integrale. Dabei spielt jeder Pfad von (X_t) die Rolle einer Ito maßdefinierenden Funktion.