Als letztes Problem dieses Abschnitts soll ein Vergleich von mehr als zwei Stichproben behandelt werden. Dieses Problem und der Lösungsansatz sollen einen ersten Einblick in das Gebiet der *Varianz-Analyse* ermöglichen.

Varianz-Analyse $a_1 = \ldots = a_k$?

Gegeben seien k st.u. Messreihen $X^{(j)} = (X_1^{(j)}, \ldots, X_{n_j}^{(j)})$ mit (i.Allg. unterschiedlichen) Längen und jeweils $\mathcal{N}(a_j, \sigma^2)$-verteilten st.u. Komponenten. Diese Messreihen sollen auf Gleichheit der a_j, also bzgl. der Hypothese „$a_1 = \ldots = a_k$" getestet werden.

Hierzu soll nach den am Anfang des Abschnitts geschilderten Prinzipien ein geeignetes Verfahren aufgebaut werden. Dabei sei $\overline{a}$ der über alle $n = \sum_{j=1}^k n_j$ Werte gemittelte Erwartungswert. Als Teil-Statistiken stehen zur Verfügung:

(1) $\overline{X}_{n_j}^{(j)}$, das individuelle Stichprobenmittel, $\mathcal{N}(a_j, \sigma^2/n_j)$-verteilt $(j=1,\ldots,k)$,

(2) $\overline{V}_{n_j}^{(j)}$, die individuelle Stichproben-Varianz, st.u. von $\overline{X}_{n_j}^{(j)}$, mit $E\overline{V}_{n_j}^{(j)} = \sigma^2$
und $\chi^2_{n_j-1}$-Verteilung von $(n_j-1)\overline{V}_{n_j}^{(j)}/\sigma^2$ (s. Folg. 10.2 (b) zur t-Vert.),

(3) $\overline{V}_{\text{ind}} := \frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^k (n_j-1)\overline{V}_{n_j}^{(j)}$, die mittlere individuelle Stichproben-Varianz,
st.u. von $(\overline{X}_{n_1}^{(1)}, \ldots, \overline{X}_{n_k}^{(k)})$, mit Erwartungswert $E\overline{V}_{\text{ind}} = \sigma^2$
und χ^2_{n-k}-Verteilung von $(n-k)\overline{V}_{\text{ind}}/\sigma^2$ (weil $\overline{V}_{n_1}^{(1)}, \ldots, \overline{V}_{n_k}^{(k)}$ st.u.),

(4) $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} X_i^{(j)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^k n_j \overline{X}_{n_j}^{(j)}$, das Gesamt-Stichprobenmittel,
st.u. von $\overline{V}_{\text{ind}}$, mit $\mathcal{N}(\overline{a}, \sigma^2/n)$-Verteilung,

(5) $\overline{V}_{\text{zw}} := \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^k n_j(\overline{X}_{n_j}^{(j)} - \overline{X}_n)^2$, die Varianz zwischen den Stichproben,
st.u. von $\overline{V}_{\text{ind}}$ (s. (3),(4)), mit Erwartungswert $\mathrm{E}\overline{V}_{\text{zw}} = \sigma^2 + \frac{1}{k-1}d^2$,
wobei $d^2 := \sum_{j=1}^k n_j(a_j - \overline{a})^2$ den Unterschied von $\mathrm{E}(X_i^{(j)}) = a_j$ und $E(\overline{X}_n) = \overline{a}$ berücksichtigt. $\mathrm{E}\overline{V}_{\text{zw}}$ ergibt sich aus der Aufspaltung
$(\overline{X}_{n_j}^{(j)} - \overline{X}_n)^2 = \left[(\overline{X}_{n_j}^{(j)} - a_j) - (\overline{X}_n - \overline{a}) + (a_j - \overline{a})\right]^2$. Falls $d = 0$, besitzt
$(k-1)\overline{V}_{\text{zw}}/\sigma^2$ eine χ^2_{k-1}-Verteilung (für $n_j = n/k$ s. (2), sonst analog).

(6) $\overline{V}_n := \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j}(X_i^{(j)} - \overline{X}_n)^2$, die Gesamt-Stichproben-Varianz mit der „Varianz-Zerlegung" $(n-1)\overline{V}_n = (n-k)\overline{V}_{\text{ind}} + (k-1)\overline{V}_{\text{zw}}$ (Probe!)

Die Abweichung der a_i vom Gesamtmittel $\overline{a}$ wird also durch die Größe d^2 (s. (5)) ausgedrückt. Daher ist bei großen Werten von $\overline{V}_{\text{zw}}$ die Hypothese gleicher a_i abzulehnen. Hierzu bietet sich die Teststatistik $T(X) := \overline{V}_{\text{zw}}/\overline{V}_{\text{ind}}$ an. Diese besitzt wegen der stoch. Unabhängigkeit von $\overline{V}_{\text{zw}}$ und $\overline{V}_{\text{ind}}$ und der χ^2_{k-1}- bzw. χ^2_{n-k}-Verteilung (s. (3),(5)) eine Fisher$(k-1, n-k)$-Verteilung.

Test von $a_1 = \ldots = a_k$? mit $\overline{V}_{\text{zw}}/\overline{V}_{\text{ind}}$

Für das oben beschriebene statistische Modell und die Hypothese „$a_1 = \ldots = a_k$", die äquivalent ist zu „$d^2 := \sum_{j=1}^k n_j(a_j - \overline{a})^2 = 0$", erhält man einen Test zum Niveau α durch den (einseitigen) kritischen Bereich

$$K := \left\{ \overline{V}_{\text{zw}}/\overline{V}_{\text{ind}} \geq F_{k-1,n-k,1-\alpha} \right\} . \tag{10.21}$$