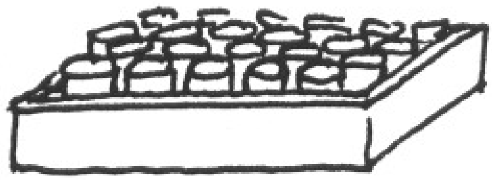
Mehrstufige W-Modelle



Beispiel: Kontrolle von 100 Werkstücken

2 „zufällig" entnommen

Modell: $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{0,1\}^2$ $\quad$ 0 = „defekt", 1 = „intakt"

Annahme: 10 der 100 sind defekt

$X_1 = 0\ [1]$ 1. Stück defekt [intakt]

$X_2 = 0\ [1]$ 2. Stück —"— —"—

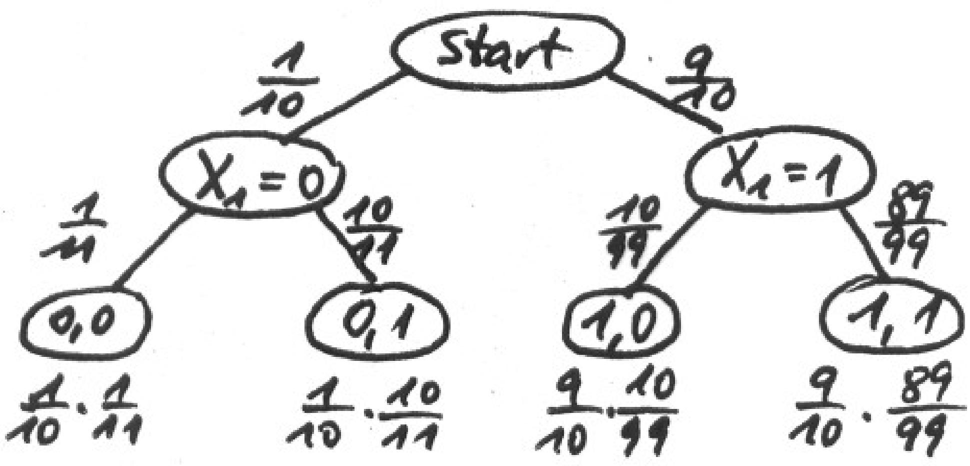
Sei $A := \{(0,0)\}$, $A_1 := \{X_1 = 0\}$, $A_2 := \{X_2 = 0\}$

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1)\,P(A_2 | A_1) = \frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99} = \frac{1}{110}$$

entspr.

$$P(\{1,0\}) = P(A_1^c)\,P(A_2 | A_1^c) = \frac{90}{100}\cdot\frac{10}{99} = \frac{1}{11} \left(= \frac{10}{110}\right)$$

Baumdarstellung



Z-Dichte? $f_1(\omega_1)$

?

$f(\omega_1, \omega_2)$

2. Stufe mit einer von ω_1 abhängigen Z-Dichte

$f_2^1(\omega_1; \omega_2)$ $\qquad \omega_1 =$ „<u>Vorgeschichte</u>"

2. Stufe mit einer von ω_1 abhängigen Z-Dichte

$$f_2^1(\omega_1;\omega_2) \qquad \omega_1 = \text{„}\underline{\text{Vorgeschichte}}\text{"}$$

$(\omega_1, \omega_2) =$

bei 3 Stufen: $f_3^2(\omega_1, \omega_2; \omega_3)$

<u>Name:</u> f_2^1, f_3^2 heißen <u>Übergangs-Zähl-Dichten</u>

Also: $f(\omega_1,\omega_2) = f_1(\omega_1)\, f_2^1(\omega_1;\omega_2)$ 2 Stufen

3 Stufen

$$f(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = f_1(\omega_1)\cdot f_2^1(\omega_1;\omega_2)\cdot f_3^2(\omega_1,\omega_2;\omega_3)$$

<u>Kurzform:</u> $f = f_1 \otimes f_2^1 \otimes f_3^2$ (ohne $\omega_1,\omega_2,\omega_3$)

Diese Verknüpfung heißt <u>Koppelung</u>

<u>Koppelung stetiger W-Modelle</u>

Statt Z-Dichten mit R-Dichten, sonst gleich

$$f(x_1,x_2,x_3) = f_1(x_1)\, f_2^1(x_1;x_2)\, f_3^2(x_1,x_2;x_3)$$

<u>Bemerkung:</u> Man kann auch auf jeder Stufe getrennt festlegen, ob Z-Dichte oder R-Dichte:

z.B. $x_1 = p \in [0,1]$ „Erfolgswahrscheinlichk."

$x_2 \in \{0,1\}$ „Misserfolg" oder „Erfolg".

Unabhängige Koppelung

Falls $f_2^1(\omega_1; \omega_2) = f_2(\omega_2)$

$f_3^2(\omega_1, \omega_2; \omega_3) = f_3(\omega_3)$ u.s.w.

Also: $\underline{f(\omega_1, \dots, \omega_n) = f_1(\omega_1)\, f_2(\omega_2) \cdots f_n(\omega_n)}$

Man spricht dann von <u>Produkt-Dichte</u>.

<u>Beispiel</u>: <u>n unabhängige Laplace-Versuche</u>

$$\Omega_1,\ f_1(\omega_1) = \frac{1}{|\Omega_1|},\ \dots,\ \Omega_n,\ f_n(\omega_n) = \frac{1}{|\Omega_n|}$$

Produktdichte auf $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$:

$$f(\omega_1, \dots, \omega_n) = f_1(\omega_1) \cdots f_n(\omega_n) =$$

$$= \text{konst.(!)} \longrightarrow \ = \frac{1}{|\Omega_1|} \cdots \frac{1}{|\Omega_n|} \overset{!}{=} \frac{1}{|\Omega|}$$

$$\Rightarrow |\Omega| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| \cdot \ldots \cdot |\Omega_n|$$

<u>Satz</u>: Bei n unabh. Laplace-Versuchen ist der <u>Gesamt-Versuch</u> auch <u>Laplace</u>.

__Beispiel__: __n unabh. Bernoulli(p)-Versuche__

1 $B(p)$-Versuch: $\Omega_1 = \{0,1\}$ $\quad 0 \hat{=}$ „Misserfolg“, $1 \hat{=}$ „Erfolg“

$$f_1(\omega_1) = \begin{cases} 1-p & \text{falls } \omega_1 = 0 \\ p & \text{falls } \omega_1 = 1 \end{cases} = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \quad (!)$$

__n Versuche__: $\quad \Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n = \bigtimes_{i=1}^{n} \{0,1\} = \{0,1\}^n$

$$\underline{f(\omega_1, \dots, \omega_n)} = \prod_{i=1}^{n} p^{\omega_i}(1-p)^{1-\omega_i} = p^{\sum \omega_i}(1-p)^{n-\sum \omega_i}$$

$$\underline{= p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{mit } k = \sum_1^n \omega_i}$$

Der Gesamtversuch heißt

__n-facher Bernoulli(p)-Versuch__

Das W-Maß zu f heißt $B_n(p)$.

Zufälliges Ziehen (ohne Zurücklegen)

Bem.: Mit Zurückl. (+Mischen) $\Rightarrow$ unabh. Koppelung

Beispiel 1: Ziehen aus N nummerierten Objekten
etwa Lotto: $N = 49$, hier 6 aus 49

Modell(e): $\Omega_1 = \{1, 2, \ldots, 49\} = \Omega_2 = \ldots = \Omega_n$

I: $\Omega = \Omega_1^6 = \{(\omega_1, \ldots, \omega_6) : \omega_i \in \Omega_1\}$

$$f(\omega_1, \ldots, \omega_6) = f_1(\omega_1) f_2^1(\omega_1; \omega_2) \cdots f_6^5(\cdots; \omega_6)$$
$$= \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{47} \cdot \frac{1}{46} \cdot \frac{1}{45} \cdot \frac{1}{44}$$

falls alle $\omega_i \neq$, sonst $= 0$.

II: $\Omega_{\neq} := \{(\omega_1, \ldots, \omega_6) \in \Omega, \text{ alle } \neq\}$
(kein Produkt $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots$)

$$f(\omega_1, \ldots, \omega_6) = \frac{1}{49} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{44} \quad \text{für alle } \omega \in \Omega_{\neq}$$
$$\overset{!}{=} \frac{1}{|\Omega_{\neq}|}, \quad \underline{|\Omega_{\neq}|} = 49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 44 = \underline{(49)_6}$$

allg. $(N)_n := \underbrace{N(N-1)\cdots(N-n+1)}_{n \text{ Faktoren}}, \ (N)_N = N!, \ (N)_0 = 1.$

III: geordnete Ergebnisse:

$\Omega' = \{(\omega_1, \dots, \omega_6) \in \Omega_1^6,\ \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_6\}$

$|\Omega'| = ?$ Zu $\omega' \in \Omega'$ ex. $\underline{6!}\ \omega \in \Omega_{\neq}$ (ungeordnet)

$\Rightarrow |\Omega'| = \frac{|\Omega_{\neq}|}{6!} = \frac{(49)_6}{6!} = \binom{49}{6} \quad \left[= \frac{49!}{6!\,43!} \right]$

$f'(\omega') = 6! \cdot \frac{1}{(49)_6} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$

Bem.: $\binom{N}{n} := \frac{(N)_n}{n!}$ gilt auch für $N \in \mathbb{R}$ (!)

($n \in \{0, 1, 2, \dots\}$)

Beispiel 2: Ziehen aus N Objekten, K markiert,

z.B. „markiert" = „intakt" = 1, „nicht markiert" = 0.

$n = 5 \quad \Omega = \{0,1\}^5$, z.B. $\omega = (0,1,0,1,0)$, $N = 100$, $K = 90$

$\Rightarrow f(0,1,0,1,0) = \frac{10}{100} \cdot \frac{90}{99} \cdot \frac{9}{98} \cdot \frac{89}{97} \cdot \frac{8}{96} = \frac{(90)_2 (10)_3}{(100)_5}$

hängt nicht von der Reihenfolge ab (!)

allg.: $\underbrace{f(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{(K)_k (N-K)_{n-k}}{(N)_n} \quad \text{mit } k = \sum_1^n \omega_i}$.