„Stetige" W-Maße über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$

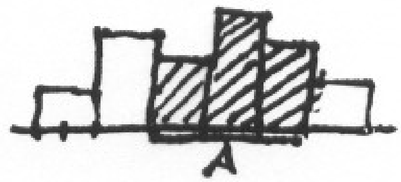
2 Hauptfälle: Ω abz., $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow$ „diskrete" W-Maße

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathbb{B} \rightarrow$ „stetige" W-Maße

Zur Erinnerung: $\mathbb{B}$ wird „erzeugt" von $\mathcal{G}_1$,

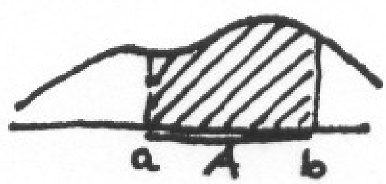
$\mathcal{G}_1 := \{(a,b], a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$

<u>Idee:</u> Statt $P(A) = \sum_{k \in A} f(k)$



$$P((a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx$$

dazu: Riemann-Integral



<u>Bemerkung:</u> $P(\Omega) = P(\mathbb{R}) = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

„uneigentliches R-Integral"

<u>Definition:</u> Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar, ≥ 0 und es gelte $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Dann heißt f Riemann-Dichte (R-Dichte) über $\mathbb{R}$.

Definition: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ R-integrierbar, ≥ 0 und es gelte $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Dann heißt f Riemann-Dichte (R-Dichte) über $\mathbb{R}$.

Satz: Jede R-Dichte f definiert eindeutig ein W-Maß P über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $P(\{a\}) = 0$ und

$$P((a,b]) = P([a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Existenz und Eindeutigkeit folgen aus dem

Fortsetzungssatz für W-Maße

Gegeben Ω, $\mathcal{A}$, ein „geeigneter" Erzeuger $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$,

$P: \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ ≥ 0, σ-additiv, „normiert"

$\Rightarrow$ Es ex. eind. Forts. zu W-Maß $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$.

Für $\Omega = \mathbb{R}$ ist $\mathcal{G}_1$ ein „geeigneter" Erzeuger

und $(a,b] \mapsto P((a,b])$ (s.o.) ist ≥ 0, σ-add., „normiert".

Beispiele von R-Dichten

1. Rechteck-Verteilung $\boxed{\mathcal{R}(a,b)}$

auch: stetige Gleichverteilung

R-Dichte: $f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$

(mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$)

$P((c,d]) = \frac{d-c}{b-a}$, falls $a \leq c < d \leq b$

4. Gamma-Verteilung $\boxed{\Gamma_{\alpha,\nu}}$ $\alpha > 0, \nu > 0$

R-Dichte $f(x) = \gamma_{\alpha,\nu}(x) = \frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\alpha x} 1_{(0,\infty)}(x)$

Bem. $\Gamma(\nu) := \int_0^\infty u^{\nu-1} e^{-u} du$, $\Rightarrow \Gamma(\nu+1) = \nu \cdot \Gamma(\nu)$

$\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\nu+1) = \nu!$ für $\nu = 0, 1, 2, \dots$

5. Beta-Verteilung $\boxed{Be(\mu,\nu)}$ $\mu > 0, \nu > 0$

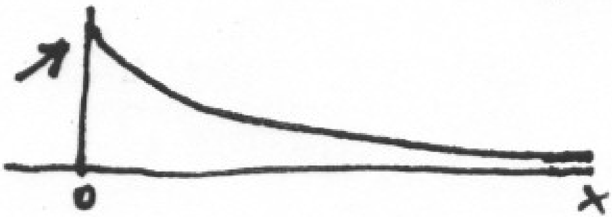
R-Dichte $f(x) = be_{\mu,\nu}(x) = \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1} 1_{(0,1)}(x)$

2. Exponential-Verteilung $\lfloor \mathrm{Exp}(\alpha) \rfloor$

(typisch für Lebensdauern)

R-Dichte: $f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$

(mit $\alpha > 0$)



3. Normal-Verteilung $\lfloor \mathcal{N}(a, \sigma^2) \rfloor$

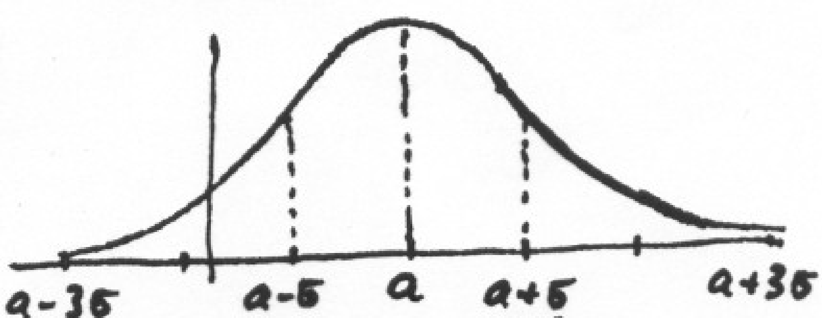
(auch Gauß-Verteilung)

R-Dichte: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(mit $a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$)

a : Mittelwert

σ : Streuung



Bem.: Wendepkte bei $a-\sigma$ u. $a+\sigma$.

Speziell: $a=0, \sigma=1$: Standard-Normalvert.

$\mathcal{N}(0,1)$, R-Dichte $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$

Bem.: $f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ (Substitution)

Normierung? $\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right]^2 = \ldots = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-u} du$

Verteilungsfunktion

„Stammfunktion", „Summenfunktion"

z.B. $P((a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

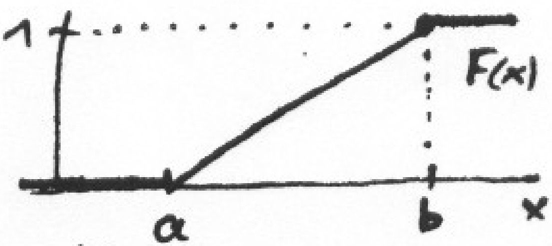
Definition: P ein W-Maß über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ (bel.).

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\underbrace{F(x) = P((-\infty, x])}$, $x \in \mathbb{R}$

heißt Verteilungsfunktion (VF) von P.

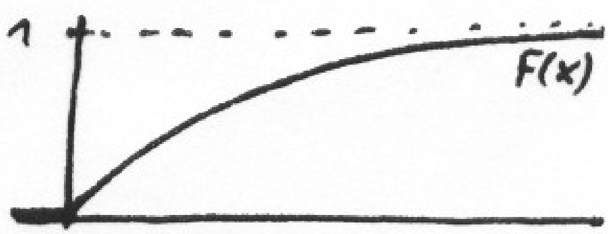
$\Rightarrow \underbrace{P((a,b]) = F(b) - F(a)}$ auch für $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Beispiele



1. $\underbrace{\mathcal{R}(a,b)}$:

$F(x) = \frac{x-a}{b-a} 1_{(a,b]}(x) + 1_{(b,\infty)}(x)$

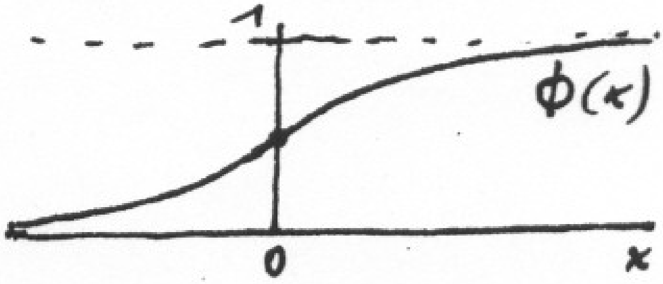


2. $\underbrace{Exp(\alpha)}$:

$F(x) = \left[1 - e^{-\alpha x}\right] 1_{[0,\infty]}(x)$

3. $\underbrace{\mathcal{N}(0,1)}$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$



$\underbrace{\mathcal{N}(a,\sigma^2)}$: $F_{a,\sigma^2}(t) = \Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right) = \dots$? Fehlanzeige

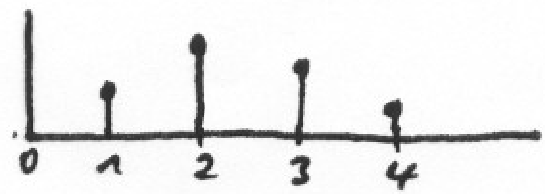
Man braucht Tabellen
oder Programme für $x \mapsto \Phi(x)$

<u>Umrechnung:</u> $t = a + \sigma x =$

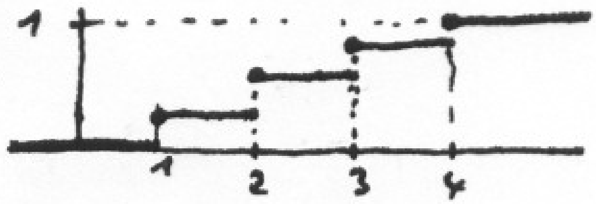
$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$x = \frac{t-a}{\sigma} =$	0	1	2	3
$\Phi(x) = F(t) =$	0.5	.841	.977	.999

4. <u>Diskrete Verteilungen</u>



$$F(x) = P\big((-\infty, x]\big) = \sum_{\substack{t \le x \\ t \in T}} f(t)$$



Sprunghöhe bei t: $f(t)$ (!)

<u>Empirische Verteilung</u> zu $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$

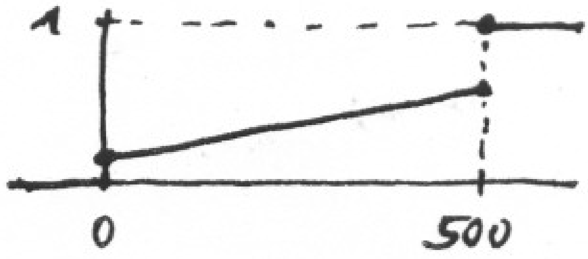
$$\hat{F}_n^{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{[x_i,\infty)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,x]}(x_i)$$

5. Gemischte Verteilungen

$\exists$ Träger T mit $f_d(t) \geq 0$, $t \in T$

und R-Dichte $f_s(x)$, $x \in \mathbb{R}$

mit $\sum\limits_{t \in T} f_d(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_s(x)\,dx = 1$



$$\Rightarrow F(x) = \sum_{\substack{t \in T \\ t \leq x}} f_d(t) + \int_{-\infty}^{x} f_s(u)\,du$$