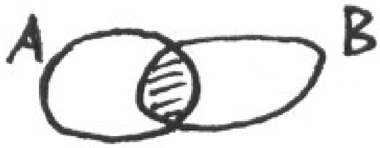
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinl. bei Zusatzinformation

z.B. W. von „Antwortzeit ≥ 10" $=: A$, <u>wenn</u> man weiß: „Auftrag ist vom Typ I" $=: B$

<u>Schreibweise:</u> $P(A|B)$

<u>Sprechweise:</u> „unter (der Bedingung) B", „unter der Voraussetzung B", „falls B vorliegt", ...



<u>Berechnung:</u> $\approx$ relative W.

$$P(A|B) = P(AB) : P(B)$$

<u>Definition:</u> Seien A, B Ereignisse in Ω, $P(B) > 0$

Dann ist $P(A|B) := \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ die bedingte W. von A unter B,

und es gilt: $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B)$ $\quad (*)$

<u>Bem.</u> Auch bei $P(B) = 0$ gilt $(*)$, falls $P(A|B)$ „irgendwas".

3 wichtige Formeln:

Verkettung: $P(ABC) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB)$

Totale W.: Falls $\Omega = \sum_{i \in I} B_i$ (I abz.), dann gilt:

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

(wg. $A = \sum_{i \in I} AB_i$)

Bayes-Umkehr-Formel: $\Omega = \sum_{i \in I} B_i$ (I abz.) $\Rightarrow$

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i \in I} P(B_i)P(A|B_i)}.$$

Beispiel (Datenübertragung):

$B_i :=$ „Zeichen i gesendet", $A_j :=$ „Zeichen j empfangen

Gefragt: $P(B_k|A_j) = ?$ Mit B-U-F falls $\left[\begin{array}{l} P(B_i) \text{ bekannt } \forall i \\ P(A_j|B_i) \text{ bek. } \forall i. \end{array}\right.$

Stochastisch unabhängige Ereignisse

Frage: $P(A|B) = P(A)$ („hängt nicht von B ab"?)

$\Leftrightarrow P(AB) : P(B) = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Definition: A, B stoch. unabhängig (st. u.),

falls $\underline{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$

Bemerkung: Mit A, B ist B, A ; A, B^c ; A^c, B^c st. u.

$\emptyset$ und Ω sind von allen Ereignissen st. u.

Mehr als 2 Ereignisse st. u.? wenn alle paarw. st. u.?

wenn $\underbrace{P(A_1 A_2 \cdots A_n) \overset{(+)}{=} P(A_1) P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)}$? beides nicht!

Definition: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und auch $(A_i, i \in I)$, I beliebig,

heißen st. u., falls (+) für alle endlichen Teilmengen gilt

Beispiel zu „paarweise st. u.": 2-mal Münze werfen.

$A_1 :=$ „1. Wurf ‚Kopf'", $A_2 :=$ „2. Wurf ‚Kopf'", $A_3 :=$ „1. W. $\neq$ 2. W."

$\Rightarrow A_1, A_2, A_3$ paarw. st. u., aber nicht (allg.) st. u.

Darstellung von W-Maßen

W-Maß $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. $\mathcal{A}$ zu groß?

3.1 Diskete W-Maße

Ω abz. $\Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (i. allg.), $A = \sum_{k \in A} \{k\}$ (!),

$\Rightarrow P(A) = \sum_{k \in A} P(\{k\})$. $P(\{k\})$ genügt.

Definition Ω abz., $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\begin{array}{ccc} P \text{ W-Maß über } (\Omega, \mathcal{P}(\Omega)) & \longrightarrow & f(k) := P(\{k\}),\ k \in \Omega \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ P(A) = \sum\limits_{k \in A} f(k),\ A \subset \Omega & \longleftarrow & f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \geq 0,\ \sum\limits_{\Omega} f(k) = 1 \end{array}$$

f heißt Zähldichte, Z-Dichte, diskr. Dichte von/zu P.

Bemerkung zu $\sum_{k \in A} f(k)$: Reihenfolge?

Bei A abz., $f(k) \geq 0$ unabh. v. d. Reihenfolge!

Auch $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k \in A_i} f(k)$ erlaubt, s. Beweis von „$\Uparrow$“.

<u>Bemerkung</u> zu „Ω abz.": Später auch anders.

Wähle $T \subset \Omega$, T abz. und $f(k) = 0$ für $k \in T^c$,

sonst $f(k) \geq 0$ und $\Sigma_{k \in T} f(k) = 1$.

Dann heißt <u>f</u> <u>Zähldichte</u> über Ω mit <u>Träger</u> T.

<u>Beispiele:</u>

1. Binomial-Verteilung: $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$, $0 \leq p \leq 1$,
   $f(k) = b(n, p; k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \Omega$, <u>s. 5.3.</u>
   $f = \underline{b(n, p; \cdot)}$ heißt <u>Binomial-Dichte</u>, $P = B(n, p)$.

2. <u>Geometrische Verteilung</u>: $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$,
   $0 < q < 1$, $f(k) = (1-q) q^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f(k) = 1$, <u>s. 5.6.</u>

3. <u>Poisson-Verteilung</u> $\underline{\pi(\lambda)}$: $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\lambda > 0$,
   $f(k) = \pi(\lambda; k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k! \Rightarrow \Sigma_0^{\infty} f(k) = 1$. <u>s. 5.4.</u>
   Beispiel: Radioaktiver Zerfall, Zahl je Min.

4. <u>Empirische Verteilung</u> zu Datensatz $x = (x_1, \dots, x_n)$
   $\Omega = \mathbb{R}$ (!), $f(x) = \hat{f}_n^{x}(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{x\}}(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{x_i\}}(x)$
   mit Träger $T = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$ ($f(x)$ = rel. Häufigk. von x).