Mathematik IV für Studierende der Physik
Vorlesungsskript

Ralf Holtkamp *
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
`www.math.uni-hamburg.de/home/holtkamp` †

Hamburg, Sommersemester 2023

Inhaltsverzeichnis

---

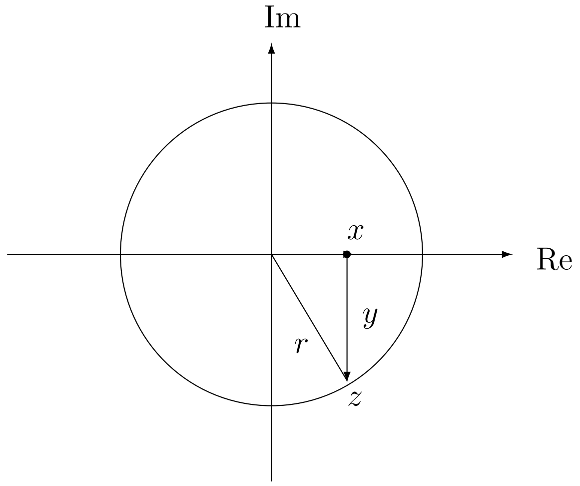
*mit Dank an die Dozenten der Vorjahre
†Version vom 16. Juni 2024

0 Wiederholungen und Ergänzungen

0.1 Komplexe Zahlen

Bemerkungen 0.1.1.
Wir erinnern an grundlegende Definitionen:

1. $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$,



$x = \mathrm{Re} z$ ist der Realteil, $y = \mathrm{Im} z$ der Imaginärteil von $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Die durch

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \mapsto & \bar{z} := x - iy \end{array}$$

gegebene Abbildung heißt *komplexe Konjugation*. Für den *Betrag* $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

2. Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, so dass $z = re^{i\varphi}$ gilt. Es ist $r = |z|$ eindeutig bestimmt; für $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist der Winkel φ bis auf ein additives Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt. Fordert man $\varphi \in (-\pi, \pi]$, so heißt $\varphi =: \arg z$, das *(Haupt-)Argument* von z; es ist eindeutig bestimmt.

   Es gilt dann

$$z = |z|e^{i\varphi} = \exp(\ln|z| + i \arg z).$$

   Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist dies eine Darstellung von z in *Polarkoordinaten*.

   Es gilt:

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für } y \geq 0, \\ -\arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

3. $\mathbb{C}$ ist ein Körper; in Polarkoordinaten schreibt sich die Multiplikation $(z, z') \mapsto zz'$ und die Inversenbildung $z \mapsto z^{-1}$ besonders einfach,

$$zz' = |z||z'|e^{i(\varphi+\varphi')}, \qquad z^{-1} = |z|^{-1}e^{-i\varphi}.$$

Bemerkungen 0.1.2.

1. Es ist $\mathbb{C}$ mit der durch
$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| \text{ für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$
definierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum (und als solcher homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ mit der metrischen Struktur, die aus der Norm auf $\mathbb{R}^2$ folgt). Es ist also definiert, was eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist: U heißt offen, wenn es zu jedem $a \in U$ ein $r > 0$ gibt, so dass die offene Kreisscheibe
$$B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} | |z - a| < r\}$$
in U enthalten ist.

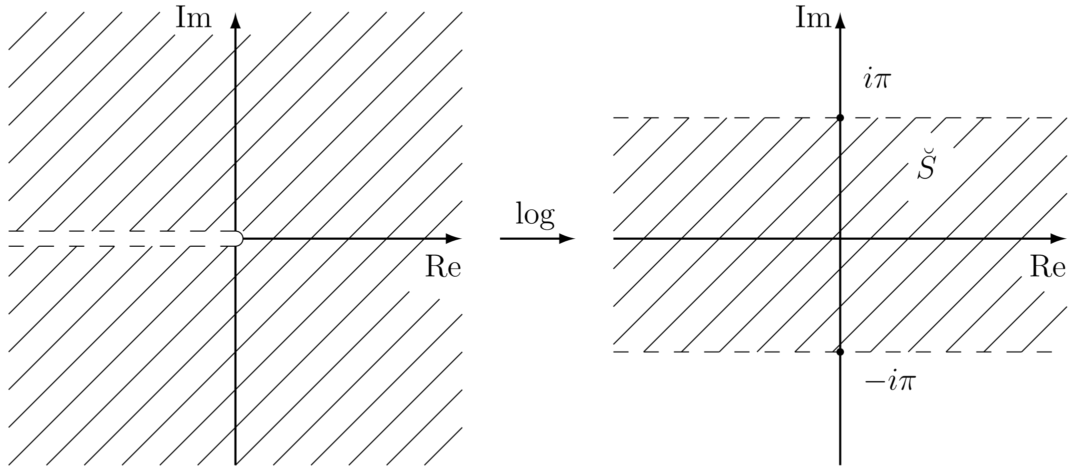
2. Wie bei jedem metrischen Raum haben wir Begriffe wie Konvergenz und Stetigkeit. Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, konvergieren komplexe Cauchy-Folgen in $\mathbb{C}$ gegen einen (eindeutig bestimmten) Grenzwert.

Betrachtung 0.1.3 (Die Logarithmus-Funktion)**.**

1. Wir definieren den *Hauptzweig* des komplexen Logarithmus (zunächst) durch
$$\log\colon \mathbb{C}^* \to S := \{x + iy | y \in (-\pi, \pi]\},$$
$$\log z := \ln |z| + i \arg z.$$
Hierbei *wählen* wir das Hauptargument aus Bemerkung 0.1.1.2. Dann ist log die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion
$$\exp\colon S \to \mathbb{C}^*.$$

2. Die Funktion $\log\colon \mathbb{C}^* \to S$ ist allerdings auf der negativen reellen Achse nicht stetig: Sei $x \in \mathbb{R}^*_+$, dann ist $-x \in \mathbb{R}^*_-$ auf der negativen Halbachse, und sowohl
$$x_n := xe^{i(\pi - \frac{1}{n})} \text{ als auch } x'_n := xe^{i(-\pi + \frac{1}{n})}$$
sind Folgen, die gegen $-x$ konvergieren, denn $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$. Da die Folgenglieder beider Folgen, $\pi - \frac{1}{n}$ und $-\pi + \frac{1}{n}$ im halbofffenen Interval $(-\pi, \pi]$ liegen, folgt
$$\log x_n = \ln x + i(\pi - \frac{1}{n}) \text{ und } \log x'_n = \ln x + i(-\pi + \frac{1}{n}),$$
$$\lim_{n\to\infty} \log x_n = \ln x + i\pi = \log(-x),$$
$$\lim_{n\to\infty} \log x'_n = \ln x - i\pi \neq \log(-x).$$

3. Im Rahmen der Vorlesung werden wir oft nicht mehr $\mathbb{C}^*$ als Definitionsbereich für den Hauptzweig des komplexen Logarithmus verwenden, sondern auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ einschränken: Die Restrikition
$$\begin{aligned} \log\colon \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_- &\to \check{S} = \{x + iy \in \mathbb{C} | y \in (-\pi; \pi)\} \\ \log z &= \ln |z| + i \arg z \end{aligned}$$
ist bijektiv, mit der Umkehrfunktion
$$\exp\colon \check{S} \to \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-.$$



Satz 0.1.4 (und Definition)**.**

1. Ist
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{mit} \quad a_n \in \mathbb{C} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$
eine *Potenzreihe* (mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$), die auch für $z_1 \neq z_0$ konvergiert, so ist sie absolut konvergent in der offenen Kreisscheibe $B_{|z_1-z_0|}(z_0)$, und gleichmäßig konvergent in $B_\rho(z_0)$ für jedes $\rho < |z_1 - z_0|$.

2. In der Situation von (1.) existiert ein eindeutig bestimmtes $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, so dass die Reihe für alle z mit $|z-z_0| < R$ absolut konvergiert und für alle z mit $|z-z_0| > R$ divergiert.

3. Der Konvergenzradius lässt sich durch die *Cauchy-Hadamardsche Formel*
$$R = \frac{1}{L} \quad \text{mit} \quad L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$
berechnen. In diesem Zusammenhang setzt man $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$.
Des Weiteren gilt, falls alle $a_n \neq 0$:
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq R \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \text{ (Quotientenkriterium).}$$

Beweis.
Übung, vgl. MfP I und [R1], Kap. 4, §1 und §3. □

0.2 Integration von Differentialformen und der Stokessche Integralsatz

Wir folgen [F3, §20-§21].

Definition 0.2.1
Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, sei
$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} f_{j_1 \ldots j_k} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

eine k-Form auf U und $\varphi\colon V \to U$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist

$$\varphi^*\omega := \sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n} (f_{j_1\ldots j_k}\circ\varphi)d\varphi_{j_1}\wedge\ldots\wedge d\varphi_{j_k}.$$

eine k-Form auf V, der Rücktransport *oder* Pullback *$\varphi^*\omega$.*

Wir halten ohne Beweis die wichtigsten Eigenschaften des Rücktransports fest:

Satz 0.2.2.

1. Der Rücktransport φ^* ist linear: für $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ und ω_1,ω_2 k-Formen gilt

$$\varphi^*(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2) = \lambda_1\varphi^*(\omega_1)+\lambda_2\varphi^*(\omega_2).$$

2. Der Rücktransport ist verträglich mit dem Dachprodukt,

$$\varphi^*(\omega\wedge\eta) = \varphi^*(\omega)\wedge\varphi^*(\eta).$$

3. Der Rücktransport ist verträglich mit der äußeren Ableitung: Ist φ zweimal stetig differenzierbar und ω eine stetig differenzierbare k-Form, so gilt

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

4. Ist weiterhin $W\subseteq\mathbb{R}^p$ offen, $\psi\colon W\to V$ stetig differenzierbar, so ist

$$(\varphi\circ\psi)^*\omega = \psi^*(\varphi^*\omega).$$

Wir brauchen explizitere Formeln für den Rücktransport.

Beispiel 0.2.3.
Seien $V\subseteq\mathbb{R}^m$ und $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, $\varphi\colon V\to U$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Die Differentiale der Koeffizientenfunktionen $\varphi_i\colon V\to\mathbb{R}$ liefern 1-Formen

$$d\varphi_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial\varphi_i}{\partial t_j}dt_j.$$

1. Für den Rücktransport einer 1-Form $\omega=\sum_{i=1}^n f_i dx_i$ auf U finden wir deshalb

$$\varphi^*\omega = \sum_{i=1}^n (f_i\circ\varphi)d\varphi_i = \sum_{j=1}^m\left(\sum_{i=1}^n (f_i\circ\varphi)\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_j}\right)dt_j$$

2. Sei $k=m$, so dass die zurückgezogene Form höchstmöglichen Grad hat. Da Differentialformen alternierend sind, folgt

$$d\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge d\varphi_{i_k} = \det\frac{\partial(\varphi_{i_1}\ldots\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,\ldots,t_k)}dt_1\wedge\ldots\wedge dt_k.$$

   Es folgt für den Rücktransport einer m-Form auf $\mathbb{R}^n$ zu einer m-Form auf $\mathbb{R}^m$:

$$\omega = \sum_{i_1<i_2\ldots<i_k} f_{i_1\ldots i_k}dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}$$

$$\varphi^*\omega = \left(\sum_{i_1<i_2\ldots<i_k}(f_{i_1\ldots i_k}\circ\varphi)\det\frac{\partial(\varphi_{i_1}\ldots\varphi_{i_k})}{\partial(t_1,\ldots,t_k)}\right)dt_1\wedge\ldots\wedge dt_k.$$

3. Insbesondere gilt im Fall $m = k = n$ für $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

$$\varphi^*\omega = f \circ \varphi(\det \mathrm{d}\varphi) dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n. \tag{1}$$

   Formen höchstmöglichen Grades transformieren sich also mit der Determinante.

Definition 0.2.4
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine n-Form

$$\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

auf U heißt über $A \subseteq U$ integrierbar, *wenn die Koeffizientenfunktion f über A im üblichen Lebesgueschen Sinne integrierbar ist. Dann setzt man*

$$\int_A \omega := \int_A f(x) \mathrm{d}^n x.$$

Insbesondere existiert für jede stetige n-Form das Integral über jedes Kompaktum $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 0.2.5
Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Gilt für alle $x \in U$, dass $\det((d\varphi)_x) > 0$, bzw. dass $\det((d\varphi)_x) < 0$, so heißt der Diffeomorphismus φ orientierungserhaltend, *bzw.* orientierungsumkehrend.

Satz 0.2.6.
Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Sei U wegzusammenhängend; dann ist φ entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend. Sei

$$\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

eine stetige n-Form auf V. Sei $A \subseteq U$ Kompaktum. Ist φ orientierungserhaltend, so gilt

$$\int_{\varphi(A)} \omega \ = \ \int_A \varphi^*\omega;$$

ist φ orientierungsumkehrend, so gilt

$$\int_{\varphi(A)} \omega \ = \ -\int_A \varphi^*\omega.$$

Beweis.
Das folgt sofort aus dem Transformationsverhalten (1) von Differentialformen in Beispiel 0.2.3 und dem Transformationssatz für Integrale. □

Definition 0.2.7
Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

1. *Unter einem* Atlas $\mathfrak{A}$ *für M versteht man eine Menge $\{\varphi_j\colon T_j \to V_j : j \in J\}$ von lokalen Parametrisierungen von M, deren Bilder M überdecken, also $\bigcup_j V_j = M$.*

2. *Lässt sich für M ein Atlas $\mathfrak{A}$ finden, so dass für je zwei sich schneidende lokale Parametrisierungen aus $\mathfrak{A}$ der zugehörige Kartenwechsel-Diffeomorphismus τ orientierungserhaltend ist, so nennt man die Untermannigfaltigkeit M* orientierbar. *(Orientierbarkeit ist eine Eigenschaft.)*

3. *Ist M versehen mit einem solchen Atlas, so nennen wir $(M, \mathfrak{A})$ eine durch den Atlas $\mathfrak{A}$* orientierte *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. (Die Wahl einer Orientierung ist eine Struktur.)*

4. *Alle weiteren lokalen Parametrisierungen von M, die wir einem Atlas $\mathfrak{A}$, der eine Orientierung definiert, hinzufügen können, so dass der Atlas immer noch eine Orientierung definiert, nennen wir* positiv orientiert*; alle anderen lokalen Parametrisierungen negativ orientiert.*

Man kann eine Orientierung einer Untermannigfaltigkeit M als Äquivalenzklasse von Atlanten verstehen. Wenn M zusammenhängend ist, so gilt: Entweder ist M nicht orientierbar, oder es existieren genau zwei Orientierungen: Zu jeder Orientierung $\mathfrak{A}$ gibt es auch noch die *entgegengesetzte Orientierung* $-\mathfrak{A}$.

Definition 0.2.8
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ω eine stetige k-Form auf U. Sei $(M, \mathfrak{A})$ eine orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit $M \subseteq U$. Sei A eine kompakte Teilmenge der Untermannigfaltigkeit M. Es soll das Integral von der k-Form ω über $(M, \mathfrak{A})$ erklärt werden.

(Man beachte dabei, dass der Grad der Form gleich der Dimension der Untermannigfaltigkeit ist.)

- *Erster Fall: Es gebe eine lokale Parametrisierung $\varphi\colon T \xrightarrow{\sim} V \subseteq M$ gibt mit $A \subseteq V$, und ohne Einschränkung sei φ positiv orientiert. Wir setzen*

$$\int_{(A,\mathfrak{A})} \omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega.$$

Aus Satz 0.2.6 und Satz 0.2.2 folgt, dass dies unabhängig von der gewählten lokalen Parametrisierung φ ist.

- *Es gebe nun endlich viele bezüglich $\mathfrak{A}$ positiv orientierte lokalen Parametrisierungen*

$$\varphi_j\colon T_j \xrightarrow{\sim} V_j \subseteq M, j = 1, \ldots, m, \text{ mit}$$

$$A \subseteq \bigcup_j V_j$$

mit einer der Überdeckung $(V_j)_j$ untergeordneten lokal-integrierbaren stetigen Teilung der Eins

$$\alpha_j\colon \bigcup_l V_l \longrightarrow \mathbb{R} \text{ für } j = 1, \ldots, m.$$

Wir setzen

$$A_j := A \cap \operatorname{supp}(\alpha_j) \subseteq V_j.$$

und nennen die k-Form ω integrierbar *über A, falls ω über alle A_j im Sinne der vorgehenden Betrachtung integrierbar ist. Dann setzen wir*

$$\int_{(A,\mathfrak{A})} \omega := \sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_j^{-1}(A_j)} (\alpha_j \circ \varphi_j) \cdot (\varphi_j^* \omega).$$

Man zeigt (wie bei der Definition des Integrals über Untermannigfaltigkeiten), dass diese Definition der Integrierbarkeit und des Integrals unabhängig von der Wahl der lokalen Parametrisierungen und der Teilung der Eins ist.

Definition 0.2.9

1. *Sei $(M, \mathfrak{A})$ eine durch den Atlas $\mathfrak{A}$ orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und φ eine bezüglich $\mathfrak{A}$ positiv orientierte lokale Parametrisierung. Man nennt für einen Punkt $p \in M$ die Basis $((\partial_1\varphi)(p), \ldots, (\partial_k\varphi)(p))$ des Tangentialraums T_pM und alle gleich-orientierten Basen des Vektorraums T_pM (bezüglich $\mathfrak{A}$)* positiv orientiert.

2. *Ist $n \geq 2$ und M spezieller eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ mit der Standard-Orientierung, so ist ein bezüglich $\mathfrak{A}$* positiv orientiertes Einheits-Normalenfeld *auf M ein stetiges Vektorfeld ν auf M, so dass für jedes $p \in M$ der Vektor $\nu(p)$ ein Einheits-Normalenvektor auf M ist, und so dass gilt: Ist $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ eine bezüglich $\mathfrak{A}$ positiv orientierte Basis von T_pM, so ist $(\nu(p), v_1, \ldots, v_{n-1})$ eine bezüglich der Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$ positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^n$.*

Für den Beweis der folgenden Aussagen verweisen wir auf [F3, §20].

Bemerkungen 0.2.10.

1. Wenn eine Hyperfläche $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Orientierung $\mathfrak{A}$ besitzt, so existiert ein positiv orientiertes Einheits-Normalenfeld.

2. Eine Orientierung einer Hyperfläche lässt sich umgekehrt durch ein Einheits-Normalenfeld ν charakterisieren.

3. Für ein Kompaktum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand ∂A sprechen wir von der *kanonischen Orientierung* des Randes ∂A, wenn die Orientierung durch das *äußere* Normalen-Einheitsvektorfeld gegeben ist.

Wir erinnern an das vektorielle (Hyper-)Flächenelement: Dies ist ein n-Tupel von $(n-1)$-Formen, $\mathrm{d}\vec{S} := (dS_1, \ldots, dS_n)^T$. Somit ist für ein stetiges Vektorfeld $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ der Ausdruck $\langle f, \mathrm{d}\vec{S}\rangle$ eine stetige $(n-1)$-Form auf U.

Wir wollen die Integration von Differentialformen und von Funktionen in Beziehung setzen.

Satz 0.2.11.
Sei U offen im $\mathbb{R}^n$ und $M \subseteq U$ eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$, die durch ein Einheits-Normalenfeld $\nu\colon M \to \mathbb{R}^n$ orientiert sei. Sei $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf U. Dann gilt für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq M$

$$\int_K \langle f, \mathrm{d}\vec{S}\rangle = \int_K \langle f(x), \nu(x)\rangle \mathrm{d}S(x).$$

Symbolisch wird die Aussage auch in der Form $\mathrm{d}\vec{S} = \nu \mathrm{d}S$ geschrieben. Man beachte, dass auf der linken Seite eine $(n-1)$-Form und auf der rechten Seite eine reellwertige Funktion integriert werden.

Beweis.

Wir betrachten nur den Spezialfall einer parametrisierten Fläche im $\mathbb{R}^3$: Es sei U offen im $\mathbb{R}^3$ und $M \subseteq U$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, die mit nur einer lokalen Parametrisierung $\varphi\colon T \xrightarrow{\sim} M$ beschrieben wird, wobei T offen im $\mathbb{R}^2$ ist.

Es sei $f = (f_1, f_2, f_3)\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld und $K \subseteq M$ kompakt. Wir wollen zeigen:

$$\int_K \langle f, \mathrm{d}\vec{S}\rangle = \int_K \langle f(x), \nu(x)\rangle \mathrm{d}S(x).$$

Für $t \in T$ ist der Einheitsnormalenvektor im Punkt $\varphi(t) \in M$ gegeben durch das Vektorprodukt

$$\nu(\varphi(t)) = \frac{\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi}{||\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi||}$$

Wir rechnen dann

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_K \langle f, \mathrm{d}\vec{S}\rangle &= \int_K f_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - \int_K f_2 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \int_K f_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} (\varphi^* f_1 \mathrm{d}\varphi_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_3 - \varphi^* f_2 \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_3 + \varphi^* f_3 \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2) \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left(\varphi^* f_1 \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1}\right)\right. \\
&\quad + \varphi^* f_2 \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}\right) \\
&\quad \left. + \varphi^* f_3 \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}\right)\right) \mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2 \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left\langle \varphi^* f, \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\right\rangle \mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2.
\end{aligned}$$

Wir haben dabei erst die Definition des vektoriellen Flächenelements $d\vec{S}$ eingesetzt, dann die Definition 0.2.8 des Integrals und die Definition 0.2.1 des Rücktransports und dann die Kettenregel, gefolgt von der Definition des Kreuzprodukts.

Unser Zwischenergebnis ist das in Definition 0.2.4 definierte Integral einer 2-Form über die Teilmenge $\varphi^{-1}(K) \subseteq \mathbb{R}^2$. Dieses Integral ist:

$$\begin{aligned}
\int_K \langle f, \mathrm{d}\vec{S}\rangle &= \int_{\varphi^{-1}(K)} \langle \varphi^* f(t), \partial_1\varphi \times \partial_2\varphi\rangle \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} \langle f(\varphi(t)), \nu(\varphi(t))\rangle \underbrace{||\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi|| \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2}_{dS(x)} \\
&= \int_K \langle f(x), \nu(x)\rangle \mathrm{d}S(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Definition 0.2.12

1. *Sei $H_k \subseteq \mathbb{R}^k$ der* Halbraum

$$\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \leq 0\}.$$

Wir versehen den Rand ∂H_k mit der durch das äußere Normalen-Einheitsvektorfeld ν mit $\nu(x) = e_1$ für $x \in \partial H_k$ gegebenen Orientierung.

2. *Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $A \subseteq M$. Ein Punkt $p \in M$ heißt* Randpunkt *der Teilmenge A relativ zur Untermannigfaltigkeit M, falls in jeder Umgebung von p sowohl Elemente von A als auch von $M \setminus A$ liegen. Die Menge aller dieser Randpunkte bezeichnen wir mit $\partial_M A$. Dies ist eine Teilmenge der Untermannigfaltigkeit M.*

3. *Wir sagen, ein Kompaktum $A \subseteq M$ habe* glatten Rand *$\partial_M A$, wenn gilt: Es existiert für jedes $p \in \partial_M A$ eine lokale Parametrisierung $\varphi \colon T \xrightarrow{\sim} V$ von M mit $p \in V$, so dass $\varphi(H_k \cap T) = A \cap V$ und $\varphi(\partial H_k \cap T) = \partial_M A \cap V$ gilt. Eine solche lokale Parametrisierung von M nennen wir* randadaptiert.

Man zeigt:

Betrachtung 0.2.13.

1. Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $A \subseteq M$ kompakt mit glattem Rand, so ist $\partial_M A$ eine kompakte $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

2. Ist die Untermannigfaltigkeit M zusätzlich orientiert, so erhält man eine *induzierte Orientierung* auf dem Rand $\partial_M A$: Man wähle nur randadaptierte lokale Parametrisierungen, die positiv orientiert sind, und schränke diese auf den Rand $\partial_M A$ ein.

3. Im Fall $k = n$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, A wie in 2, ist die auf $\partial_M A$ durch die kanonische Orientierung von M induzierte Orientierung diejenige, die durch das äußere Normalen-Einheitsvektorfeld gegeben ist.

Der folgende Satz ist schon ein Spezialfall des Satzes von Stokes:

Lemma 0.2.14.
Sei ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form im $\mathbb{R}^k$ mit $k \geq 2$, mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_{H_k} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial H_k} \omega.$$

Beweis.

- Wir schreiben die $(k-1)$-Form ω als

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_k$$

  mit C^1-Funktionen $f_1, \ldots, f_k$. In der von der randadaptierten lokalen Parametrisierung induzierten lokalen Parametrisierung $\beta \colon \mathbb{R}^{k-1} \to \partial H_k$ des Randes mit $(t_1, \ldots, t_{k-1}) \mapsto (0, t_1, \ldots, t_{k-1})$ gilt

$$\beta^* \omega = f_1(0, t_1, \ldots, t_{k-1}) dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{k-1};$$

  also folgt für das Randintegral

$$\int_{\partial H_k} \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t_1, \ldots, t_{k-1}) \mathrm{d}^{k-1} t.$$

- Wir berechnen das Integral der k-Form

$$d\omega = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$$

über den Halbraum $H_k = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-1}$. Für jedes feste $(x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$ folgt, da die Komponentenfunktion f_1 kompakten Träger hat

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_k)\mathrm{d}x_1 = f_1(0, x_2, \ldots, x_k).$$

Es folgt durch weitere Integration:

$$\int_{H_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_k)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_k)\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_k.$$

Für $2 \leq j \leq k$ gilt

$$\int_{H_k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_k)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k = \pm \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x_j} \ldots \mathrm{d}x_k.$$

Für festes $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ hat die Funktion $x_j \mapsto f_j(x_1, \ldots, x_k)$ kompakten Träger. Also verschwindet das Integral in der Klammer. Insgesamt ergibt sich

$$\int_{H_k} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_k)\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_k = \int_{\partial H_k} \omega.$$

□

Wir können nun den Stokesschen Integralsatz in seiner vollständigen Form formulieren:

Theorem 0.2.15 (Stokesscher Integralsatz im $\mathbb{R}^n$)**.**
Sei U offen im $\mathbb{R}^n$. Sei $M \subseteq U$ eine orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit (mit $k \geq 2$) und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form in U. Dann gilt für jedes Kompaktum $A \subseteq M$ mit glattem Rand $\partial_M A$, wobei wir $\partial_M A$ mit der von M induzierten Orientierung versehen:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial_M A} \omega.$$

Der Stokessche Integralsatz gilt auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten.

Beweis.

- Wie im Beweis des Gaußschen Integralsatzes führen wir zu einem randadaptierten Atlas ein feine beliebig oft differenzierbare Teilung der Eins $\alpha_{p,\epsilon}$ ein und zerlegen die $(k-1)$-Form ω:

$$\omega = \sum_p \alpha_{p,\epsilon}\omega.$$

Es genügt wieder, den Stokesschen Integralsatz für die einzelnen Summanden zu beweisen.

- Wir nehmen daher an, dass $M \cap \operatorname{supp}(\omega)$ kompakt und ganz in Bild einer lokale Parametrisierung $\varphi\colon \Omega \to V \subseteq M$ aus dem randadaptierten Atlas enthalten ist. Die Differentialform $\varphi^*\omega$ auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ kann daher durch Null zu einer auf ganz $\mathbb{R}^k$ stetig differenzierbaren Differentialform $\tilde{\omega}$ mit kompaktem Träger fortgesetzt werden. Es gilt

$$(*) \qquad \int_A d\omega \overset{\text{def}}{=} \int_{H_k \cap \Omega} \varphi^*(d\omega) \overset{0.2.2.3}{=} \int_{H_k \cap \Omega} d\varphi^*\omega = \int_{H_k} d\tilde{\omega}.$$

- Betrachte die Einbettung

$$\begin{array}{rccc} \beta\colon & \mathbb{R}^{k-1} & \to & \mathbb{R}^k \\ & (u_1, \ldots, u_{k-1}) & \mapsto & (0, u_1, \ldots, u_{k-1}) \end{array}$$

  und

$$\Omega_0 := \beta^{-1}(\partial H_k \cap \Omega) \subseteq \mathbb{R}^{k-1}.$$

  Dann ist

$$\psi := \varphi \circ \beta\colon \Omega_0 \to V_0 := \partial_M A \cap V$$

  eine lokale Parametrisierung des Randes $\partial_M A$. Dann ist

$$(**) \qquad \int_{\partial_M A} \omega \overset{\text{def}}{=} \int_{\Omega_0} \psi^*\omega = \int_{\Omega_0} \beta^*\varphi^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \beta^*\tilde{\omega} = \int_{\partial H_k} \tilde{\omega}.$$

  Die Gleichheit von $(*)$ und $(**)$ und somit die Behauptung folgt nun aus Lemma 0.2.14.

$\square$

Korollar 0.2.16.
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form auf U. Dann gilt für jede orientierte, kompakte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq U$

$$\int_M d\omega = 0.$$

Beweis.
Da M kompakt ist, wähle im Stokesschen Satz 0.2.15 $A = M$. Da die Mannigfaltigkeit M keinen Rand hat, ist $\partial M = \emptyset$. $\square$

Wir leiten aus dem Stokesschen Satz 0.2.15 zwei klassische Integralsätze ab.

Bemerkungen 0.2.17.

1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Betrachte eine parametrisierte Fläche $M \subseteq U$ im $\mathbb{R}^3$. Ferner sei ein differenzierbares Vektorfeld $F\colon U \to \mathbb{R}^3$ gegeben, das mit dem vektoriellen Linienelement $\mathrm{d}\vec{s} = (dx_1, \ldots, dx_n)^T$ eine 1-Form $\omega := \langle F, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$ liefert.

   Sei $A \subseteq M$ ein Kompaktum in der Fläche M mit glattem Randweg $\varphi\colon [a,b] \to M$, der positiv umlaufend sein soll. Dann erhalten wir mit $d\omega = \langle \operatorname{rot} F, \mathrm{d}\vec{S}\rangle$:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_A \langle \operatorname{rot} F(x), \nu(x)\rangle \mathrm{d}S(x) &\overset{0.2.11}{=} \int_A \langle \operatorname{rot} F, \mathrm{d}\vec{S}\rangle = \int_A d\omega \\ &\overset{0.2.15}{=} \int_{\partial_M A} \omega = \int_{\partial_M A} \langle F, \mathrm{d}\vec{s}\rangle \\ &= \int_{[a,b]} \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

   Dies ist der klassische Satz von Stokes.

2. Der Spezialfall $k = n$ des Satzes von Stokes 0.2.15 ist der klassische Satz von Gauß:
   Mit der $(n-1)$-Form $\omega = \langle F, \mathrm{d}\vec{S} \rangle$ ist hierbei $d\omega = (\operatorname{div} F) \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ und wir finden

$$\begin{aligned} \textstyle\int_A \operatorname{div} F \mathrm{d}^n x &= \int_A d\omega \overset{0.2.15}{=} \int_{\partial_M A} \omega = \int_{\partial_M A} \langle F, d\vec{S} \rangle \\ &\overset{0.2.11}{=} \int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle dS(x). \end{aligned}$$

1 Funktionentheorie

1.1 Komplexe Differenzierbarkeit

In der Funktionentheorie beschäftigt man sich mit Funktionen (auf nicht-leeren offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$), die komplex differenzierbar sind.

Bisher haben wir nur Ableitungen komplexwertiger Funktionen reeller Variablen

$$f\colon U \to \mathbb{C} \text{ mit } U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

definiert. Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kann als zwei-dimensionaler reeller Vektorraum aufgefasst werden. Daher ist der Begriff der *reellen* Differenzierbarkeit und reellen Ableitung von Funktionen

$$f\colon U \to \mathbb{C} \text{ mit } U \subseteq \mathbb{C} \text{ offen}$$

definiert.

Wir treffen folgende Verabredungen:

- Sei $B \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Wenn z_0 Häufungswert von $B \setminus \{z_0\}$ ist und $g\colon B \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so ist mit $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$ immer $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in B\setminus\{z_0\}}} g(z)$ gemeint.
- Es bezeichne $U \subseteq \mathbb{C}$ im folgenden immer eine nicht-leere offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Ist U zusätzlich wegzusammenhängend, so sprechen wir von einem *Gebiet* in $\mathbb{C}$.

Definition 1.1.1

1. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ wie oben (offen und nicht leer). Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt im Punkt $z_0 \in U$* komplex differenzierbar, *wenn der Grenzwert*

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z_0+z)-f(z_0)}{z} =: f'(z_0)$$

existiert.

2. *Eine Funktion heißt im Punkt $z_0 \in U$* holomorph, *wenn sie in einer Umgebung von z_0 (also etwa einer Kreisscheibe $B_\varepsilon(z_0)$) komplex differenzierbar ist.*
3. *Eine* holomorphe Funktion *auf U ist eine auf U komplex differenzierbare Funktion f.*

Beispiel 1.1.2.

1. Ist f konstant gleich $c \in \mathbb{C}$, so ist f komplex differenzierbar mit Ableitung $f' = 0$. Für die Funktion $f(z) = z$ gilt $f'(z_0) = 1$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$.
2. Wir betrachten die komplexe Konjugation:

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{z}.$$

Dann gilt für $z_0, z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$:

$$\frac{f(z_0+z)-f(z_0)}{z} = \frac{\overline{z_0+z}-\overline{z_0}}{z} = \frac{\overline{z}}{z}.$$

Der Grenzwert $\lim_{z\to 0}\dfrac{\overline{z}}{z}$ existiert nicht: Für die Folge $u_k := \dfrac{1}{k}$ reeller Zahlen mit $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ gilt $\lim_{k\to\infty}\dfrac{\overline{u_k}}{u_k} = 1$. Aber für die Folge $v_k := \dfrac{i}{k}$ rein imaginärer Zahlen, für die ebenfalls $\lim_{k\to\infty} v_k = 0$ gilt, finden wir $\lim_{k\to\infty}\dfrac{\overline{v_k}}{v_k} = -1$.

Die Funktion f ist also in keinem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, obwohl f in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ reell stetig differenzierbar ist.

Bemerkungen 1.1.3.

1. Da komplexe Differenzierbarkeit formal genau so definiert ist wie Differentiation im $\mathbb{R}^1$, lassen sich Regeln wie Summen- , Produkt-, Kettenregel und l'Hospital analog wie im Reellen beweisen. (Man muss nur statt Intervallen offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ als Definitionsbereiche betrachten.) Insbesondere sind polynomiale Funktionen holomorph.

2. Man zeigt auch wie bei reeller Differenzierbarkeit: Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ ist genau dann in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$, eine Kreisscheibe $B_\varepsilon(0)$ mit $\varepsilon > 0$ und eine Funktion

$$\varphi\colon B_\varepsilon(0) \to \mathbb{C} \text{ mit } \lim_{z\to 0}\frac{\varphi(z)}{z} = 0$$

gibt, so dass

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + c \cdot z + \varphi(z) \text{ für } z \in B_\varepsilon(0)$$

gilt. In diesem Fall ist $c = f'(z_0)$.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Differentiation in $\mathbb{C}$ und Differentiation in $\mathbb{R}^2$?

Satz 1.1.4.
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f\colon U \to \mathbb{C}$. Man schreibe $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x+iy$, wobei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $u(x,y), v(x,y)$ reellwertige Funktionen sind.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist in z_0 komplex differenzierbar.

2. f ist in (x_0, y_0) reell-differenzierbar und es gelten die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\end{aligned}$$

Dies ist ein System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für die reellwertigen Funktionen u und v in zwei Variablen.

Beweis.
Sei f in z_0 komplex differenzierbar und $A := f'(z_0) \in \mathbb{C}$. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$0 = \lim_{z\to 0}\frac{f(z_0+z) - f(z_0) - Az}{z} \tag{2}$$

gilt. Wir spalten in Real- und Imaginärteil auf:

$$A = \alpha + i\beta \text{ und } z = h + ik \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta, h, k \in \mathbb{R}$$

und somit

$$Az = \alpha h - \beta k + i(\alpha k + \beta h).$$

Wir betrachten erst den Fall, dass $k = 0$ ist und erhalten

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Dies stimmt überein mit dem Grenzwert

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(z_0+ik) - f(z_0)}{ik} = -i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Dies ergibt die Cauchy-Riemann-Gleichungen für f in z_0.

Gelten umgekehrt die Cauchy-Riemann-Gleichungen und setzen wir

$$\begin{array}{rcrcl} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & = & \alpha & = & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & = & -\beta & = & -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \end{array}$$

so können wir die Jacobi-Matrix A schreiben als $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Damit ist die Multiplikation mit A eine komplex-lineare Abbildung und entspricht der Multiplikation mit $\alpha + i\beta$, so dass (2) gilt. □

Man beachte, dass wir auch die folgende Identität mitbeweisen haben:

$$f'(z_0) = A = \alpha + i\beta = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Als einfache Folgerung haben wir das

Korollar 1.1.5.
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ auf U holomorph und $f'(z) = 0$ für alle $z \in U$. Dann ist f auf U konstant.

Beweis.
Nach dem vorangegangenen Satz 1.1.4 ist dann f auf U differenzierbar und es gelten für $f = u + iv$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x$$

sowie $f' = u_x + iv_x$. Aus $f' = 0$ folgt somit $u_x = v_x = 0$ und aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen das Verschwinden aller partiellen Ableitungen. Nach einem Satz aus der Analysis folgt auf dem Gebiet U daher, dass die reellen Funktionen u und v und somit auch f auf U konstant sind. □

Korollar 1.1.6.
Ist $f = u + iv$ holomorph auf einem Gebiet U und existieren auch noch stetige zweite partielle Ableitungen von u und v, so sind u und v harmonische Funktionen, d. h. es gilt in U:

$$\Delta u = \Delta v = 0.$$

Beweis.
Dies folgt mit direkter Rechnung aus den Cauchy-Riemannschen Gleichungen:

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = (v_x)_y = -(u_y)_y = -u_{yy}.$$

□

Beispiel 1.1.7. Für die Funktion $f(z) = z^2$ kann man die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen leicht explizit überprüfen. Es ist ebenfalls nicht schwer, so zu zeigen, dass Polynome $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ holomorph sind.

Bemerkungen 1.1.8. Mit Hilfe des Differentialoperators

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

kann man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen umschreiben zu

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\, f\ (z_0) = 0.$$

Denn:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv) = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(u_y + v_x) = 0.$$

Zum Beispiel erhält man für die Funktion $f(z) = \bar{z}$, dass $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\, f\ (z_0) = 1$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$. Es folgt die aus Beispiel 1.1.2.2 bekannte Tatsache, dass f nicht holomorph ist.

Bemerkungen 1.1.9. Dies rechtfertigt, eine Funktion f auf $\mathbb{R}^2$ umzuschreiben zu

$$f(x, y) = f\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z}), \frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right),$$

und im Wirtingerkalkül formal nach unabhängigen Variablen $z, \bar{z}$ zu differenzieren. Dabei ist

$$f'(z_0) \quad = \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} f\right)(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\big(u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\big).$$

Satz 1.1.10 (und Definition)**.** Ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{mit} \quad a_n \in \mathbb{C} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

eine Potenzreihe um z_0 mit Konvergenzradius $R > 0$, und

$$f\colon B_R(z_0) \longrightarrow \mathbb{C},\;\; f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

so ist f in jedem $z \in B_R(z_0)$ komplex differenzierbar, mit

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Beweis.
Dies ist eine leichte Folgerung von 0.1.4. Insbesondere zeigt man, dass auch $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ in $B_R(z_0)$ absolut konvergiert.

$\square$

Beispiel 1.1.11.

1. Aus 1.1.10 folgt, dass die Funktionen $\exp, \sin, \cos\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph sind, und dass gilt:
$$\exp' = \exp, \sin' = \cos, \cos' = -\sin.$$

2. Der auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ eingeschränke (Hauptzweig des) log aus 0.1.3(3.) ist holomorph, denn es ist

$$\log(x+iy) = \underbrace{\ln\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + \underbrace{i \operatorname{sgn} y \cdot \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{v(x,y)}$$

$$\text{mit } \operatorname{sgn} y := \begin{cases} 1 & \text{für } y \geq 0 \\ -1 & \text{für } y < 0 \end{cases} \overset{(y\neq 0)}{=} \frac{y}{\sqrt{y^2}}$$

woraus durch Differenzieren folgt, für $y \neq 0$:

$$v_x(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \text{und} \qquad v_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Zum Beweis der rechten Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} v(x,y) &= -\frac{\operatorname{sgn} y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{-x}{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} \cdot 2y = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{y^2}} \cdot \frac{xy \operatorname{sgn} y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} \\ &= \frac{(\operatorname{sgn} y)^2 x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Das gilt auch für $x > 0$, $y = 0$, und außerdem

$$u_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ und } u_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind also erfüllt, die Funktion log ist auf $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ holomorph, und es folgt

$$f'(z) = (u_x + iv_x)(x,y) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z}.$$

Die Einschränkung auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ war hierbei notwendig: Eine Vergrößerung des Definitionsbereichs ermöglicht keine stetige Funktion - insbesondere auch keine holomorphe Funktion.

Bemerkungen 1.1.12. Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt, dass die Jacobische Determinante einer in einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorphen Funktion f dort gerade gleich

$$u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2$$

ist. Ist speziell $f'(z_0) \neq 0$, so ist f ein (lokaler) Diffeomorphismus.

Definition 1.1.13

1. *Eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ heißt* konform, *wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*
   (i) Die Abbildung L ist injektiv und für je zwei Vektoren $0 \neq v, 0 \neq w \in \mathbb{R}^k$ gilt

   $$\frac{\langle Lv, Lw\rangle}{\|Lv\| \cdot \|Lw\|} = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

   (ii) Es gibt eine Zahl $\rho \neq 0$, so dass für die darstellende Matrix A von L gilt $A^{\mathrm{T}}A = \rho^2\mathbf{1}$.

   (Es ist leicht zu sehen, dass aus der zweiten Bedingung $\langle Lv, Lw\rangle = \rho^2\langle v, w\rangle$ und somit die erste Bedingung folgt. Für die andere Richtung verweisen wir auf [Koe, p. 176].)

2. *Eine differenzierbare Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt* konform *im Punkt $x \in U$, wenn ihr Differential $\mathrm{d}f(x)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ in x eine konforme lineare Abbildung ist.*

Bemerkungen 1.1.14.

1. Aus der ersten Charakterisierung konformer Abbildungen folgt, dass konforme Abbildungen Winkel erhalten.

2. Ist A die darstellende Matrix einer konformen Abbildung und $k = n$, so ist $\rho^{-1}A$ eine orthogonale Matrix. Man nennt dann A eine Ähnlichkeitsmatrix.

3. Nach der Kettenregel werden die Tangentialvektoren differenzierbarer Kurven durch den Punkt x unter f durch das Differential $\mathrm{d}f(x)$ abgebildet. Daher ist eine differenzierbare Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ konform in $z \in U$, wenn für alle differenzierbaren Kurven γ_1, γ_2 mit $\gamma_1(0) = z = \gamma_2(0)$ sich die Kurven $f \circ \gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ in $f(z)$ im gleichen Winkel schneiden wie die Kurven γ_1 und γ_2 im Punkt z.

Satz 1.1.15.
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f = u + iv\colon U \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Dann ist f in $z \in U$ genau dann konform, wenn die beiden folgenden Bedingungen gelten:

(i) Das Paar (u, v) oder das Paar (v, u) erfüllt in z die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

(ii) Es gilt $u_x^2(z) + v_x^2(z) \neq 0$.

Beweis.
Eine reelle 2×2-Matrix ist genau dann orthogonal wenn sie entweder von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

ist, also eine Drehung oder eine Drehspiegelung ist, und $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ gilt. Also ist die Jacobische Matrix $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ genau dann eine Ähnlichkeitsmatrix, wenn die beiden Bedingungen gelten.

$\square$

Korollar 1.1.16.
Eine holomorphe Funktion ist genau dann konform im Punkt $z \in U$, wenn $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) \neq 0$. Holomorphe Funktionen erhalten die Orientierung.

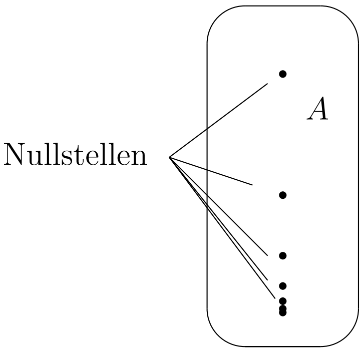
Definition 1.1.17
*Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt (komplex-)*analytisch, *wenn zu jedem Punkt $z_0 \in U$ eine offene Kreisschreibe $B_\rho(z_0) \subseteq U$ und eine komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass die Funktion f sich um z_0 in eine absolut konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ entwickeln lässt, mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ für jedes $z \in B_\rho(z_0)$.*

Bemerkungen 1.1.18.

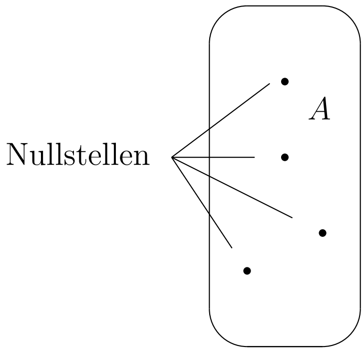
1. Die a_n sind eindeutig bestimmt durch $a_k = \dfrac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$.
2. Wir werden später zeigen, dass jede auf der offenen Menge U holomorphe Funktion auf U analytisch ist.

Satz 1.1.19. Für jede analytische Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}, U$ offen in $\mathbb{C}$, $U \neq \emptyset$, gilt:
Ist $z_0 \in U$ mit $f(z_0) = 0$, so gibt es ein $r > 0$, so dass entweder $f(z) = 0$ für alle $z \in B_r(z_0)$ gilt, oder $f(z) \neq 0$ für alle $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ gilt (man sagt im zweiten Fall: die Nullstellen sind *isoliert*).

Mit anderen Worten: Ist f analytisch auf einem Gebiet A und dort nicht identisch Null, so besitzen die Nullstellen von f in A keine Häufungspunkte, d.h. es gibt in A keine konvergente Folge von Nullstellen von f:



nicht so,



sondern so.

Beweis.
Es gibt ein $\rho > 0$, so dass $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für alle $z \in B_\rho(z_0) \subseteq U$ ist. Es kann sein, dass alle $a_n = 0$ sind, dann ist

$$f(z) = 0 \text{ für alle } z \in B_\rho(z_0).$$

Anderenfalls gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0 \text{ aber } a_k \neq 0. \text{ Dann ist}$$

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-z_0)^n$$

für $z \in B_\rho(z_0)$. Die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-z_0)^n$$

konvergiert dann nach dem Kriterium von Cauchy-Hadamard auch dort gleichmäßig, wo f konvergiert, und definiert eine stetige Funktion $g\colon B_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$.

Zu $\varepsilon := \frac{|a_k|}{2}$ gibt es also ein r mit $0 < r \leq \rho$ und

$$|g(z) - g(z_0)| = |g(z) - a_k| \leq \varepsilon \quad \forall z \in B_r(z_0),$$

also $|g(z)| \geq |a_k| - |g(z) - a_k| > |a_k| - \dfrac{|a_k|}{2} = \dfrac{|a_k|}{2} > 0$,
also $g(z) \neq 0$ und damit auch

$$f(z) = (z-z_0)^k \cdot g(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

$\square$

1.2 Komplexe Kurvenintegrale

Auf $\mathbb{R}^2$ hatten wir bereits reelle Differentialformen betrachtet; wir betrachten nun auch komplexe Differentialformen auf $\mathbb{R}^2$, mit komplexwertigen Koeffizientenfunktionen.

Betrachtung 1.2.1.

1. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und
$$h : U \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2, \quad z \mapsto h(z)$$
eine Funktion, die stetig reell differenzierbar ist bezüglich x und y, mit $z = x + iy \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Wir betrachten Differentialformen auf $\mathbb{R}^2$ mit komplexwertigen Koeffizientenfunktionen. Insbesondere ist das Differential $\mathrm{d}z$ der Standardkoordinate $z = x + iy$ eine komplexwertige Einsform auf $\mathbb{C}$ und zwar haben wir
$$\begin{aligned} \mathrm{d}z &= \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}\bar{z} &= \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y. \end{aligned}$$
Die äußere Ableitung $\mathrm{d}h$ von h ist, wie immer, durch $\mathrm{d}h = h_x\mathrm{d}x + h_y\mathrm{d}y$ definiert. Es gilt
$$\begin{aligned} \mathrm{d}h &= h_x\mathrm{d}x + h_y\mathrm{d}y = h_x\frac{\mathrm{d}z + \mathrm{d}\bar{z}}{2} + h_y\frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}\bar{z}}{2i} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)h\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)h\mathrm{d}\bar{z} \end{aligned}$$
Hieraus folgt
$$\mathrm{d}h = \frac{\partial h}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}.$$
Außerdem gilt
$$\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = (\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) \wedge (\mathrm{d}x - i\mathrm{d}y) = i\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x - i\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -2i\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

2. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion. Wegen der komplexen Differenzierbarkeit der Funktion f auf U, folgt aus den Cauch-Riemannschen-Differentialgleichungen und Bemerkung 1.1.8, dass $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ auf U verschwindet. Daher verschwindet in der Ableitung df der Term mit $d\bar{z}$. Außerdem gilt mit den Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen $f'(z_0) = \left(\frac{\partial}{\partial z}f\right)(z_0) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv)\right)(x_0, y_0)$. Somit gilt $\mathrm{d}f = f'(z)\mathrm{d}z$.

Wir benötigen einige Begriffe:

Definition 1.2.2
Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Eine Funktion $F\colon U \to \mathbb{C}$ heißt (holomorphe) Stammfunktion *von f auf U, falls F auf U holomorph ist und für ihre komplexe Ableitung $F'(z) = f(z)$ auf U gilt.*

Definition 1.2.3

1. *Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht nur aus einem Punkt bestehendes kompaktes Intervall und $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Ist γ stückweise stetig differenzierbar, so nennen wir γ eine* Kurve *oder (im Folgenden auch kurz)* Weg *in $\mathbb{C}$. Das Bild $|\gamma| := \gamma(I)$ nennen wir die* Spur *des Wegs. (Sie kann durchaus Selbstüberschneidungen haben.) Gilt $|\gamma| \subseteq U \subseteq \mathbb{C}$, so nennen wir γ eine Kurve in U.*

2. *Der Punkt $\gamma(a)$ heißt* Anfangspunkt, *der Punkt $\gamma(b)$* Endpunkt *der Kurve. Gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt γ* geschlossene Kurve. *Ist γ konstant, so sagen wir, γ reduziere sich auf einen Punkt.*

3. *Mit $\gamma\colon I := [a,b] \to \mathbb{C}$ ist auch $\gamma^{\leftarrow}\colon I \to \mathbb{C}$ mit $\gamma^{\leftarrow}(t) = \gamma(a+b-t)$ wieder eine Kurve, die zu γ* entgegengesetzte Kurve.

4. *Sei $I_1 = [b,c]$ ein weiteres kompaktes Intervall und $I_2 := I \cup I_1$. Ist dann $\gamma_1\colon I_1 \to \mathbb{C}$ eine auf I_1 definierte Kurve mit $\gamma_1(b) = \gamma(b)$, so definieren wir die* Aneinanderreihung *als die Kurve*
$$(\gamma \vee \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma(t) \text{ für } t \in I, \\ \gamma_1(t) \text{ für } t \in I_1, \end{cases}$$
die auf I_2 definiert ist.

Definition 1.2.4
Sind γ_1, γ_2 zwei auf I_1 bzw. I_2 definierte Kurven, so nennen wir γ_1 und γ_2 äquivalent, *wenn eine monoton wachsende bijektive Abbildung $\varphi\colon I_1 \to I_2$ existiert, so dass φ und φ^{-1} stückweise stetig differenzierbar sind und $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ gilt.*

Bemerkungen 1.2.5.

1. Man macht sich leicht klar, dass eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege vorliegt.

2. Ist der Weg γ auf dem Intervall $I = [a,b]$ definiert, so gibt es auf jedem anderen Intervall $I_1 := [c,d]$ einen zu γ äquivalenten Weg γ_1: Dazu finde eine affine bijektive Abbildung $t \mapsto \varphi(t) = \alpha t + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$ von I_1 auf I und betrachte $\gamma_1 := \gamma \circ \varphi$.

3. Statt mit stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Wegen arbeitet man manchmal auch allgemeiner mit Wegen, die Stammfunktionen von Lebesgue-integrierbaren Funktionen sind.

Betrachtung 1.2.6.

1. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $f(z)\mathrm{d}z$ eine stetige komplexwertige Einsform. Wenn wir sie über die von γ parametrisierte ein-dimensionale reelle Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}$ integrieren, müssen wir die stückweise stetige komplexwertige Einsform
$$\gamma^*(f(z)\mathrm{d}z) = f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$
über das Intervall $[a,b]$ integrieren:
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

2. Nach Betrachtung 1.2.1 können wir auch allgemeine komplexe 1-Formen $\omega = f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\bar{z}$ auf $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ betrachten und diese über eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ integrieren. Wir erhalten
$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_a^b \left(f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + g(\gamma(t)) \cdot \overline{\gamma'(t)}\right)\mathrm{d}t.$$
Diesen allgemeineren Fall werden wir im Folgenden jedoch nicht benötigen.

Definition 1.2.7
Sei γ ein auf $I = [a, b]$ definierter Weg und f eine stetige Abbildung der kompakten Menge $\gamma(I)$ mit Werten in $\mathbb{C}$ (oder allgemeiner einem komplexen Banachraum E). Das Integral

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

wird das Integral *von f* längs des Wegs *oder* Wegintegral *entlang γ genannt.*

Die folgenden Aussagen sind klar:

Lemma 1.2.8.

1. Sind die Wege γ und γ_1 äquivalent im Sinne von Definition 1.2.4, so folgt aus der Kettenregel
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$$
2. Für den dem Weg γ entgegengesetzten Weg $\gamma^{\leftarrow}$ gilt
$$\int_{\gamma^{\leftarrow}} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$
3. Ist die Aneinanderreihung zweier Wege γ und γ_1 definiert, so gilt
$$\int_{\gamma\vee\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$$
4. Sei γ ein *geschlossener* Weg auf $I = [a, b]$. Für beliebiges $c \in I$ betrachte die Abbildung
$$\begin{array}{rcl} \gamma_c\colon [c, c+b-a] & \to & \mathbb{C} \\ \gamma_c(t) & := & \begin{cases} \gamma(t) & \text{für} \quad c \le t \le b \\ \gamma(t-b+a) & \text{für} \quad b \le t \le c+b-a \end{cases} \end{array}$$
Dann ist auch γ_c ein geschlossener Weg und es gilt
$$\int_{\gamma_c} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$
für jede stetige Abbildung $f\colon \gamma(I) \to E$. Das Integral längs eines geschlossenen Weges ist also nicht vom Anfang des geschlossenen Weges abhängig.

Bemerkungen 1.2.9.
Die Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ habe eine holomorphe Stammfunktion F auf U. Sei $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg in U. Nach der Kettenregel ist die Ableitung der Funktion

$$\begin{array}{rcl} G\colon [a, b] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & F(\varphi(t)) \end{array}$$

gleich

$$G'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Also gilt

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \overset{\text{(Hauptsatz)}}{=} G(b) - G(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Ist insbesondere der Weg φ geschlossen, also $\varphi(a) = \varphi(b)$, so folgt $\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Beispiel 1.2.10.

1. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := z^2$. Durch $F(z) := \frac{1}{3}z^3$ ist eine Stammfunktion von f auf $\mathbb{C}$ gegeben. Für den Weg

$$\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \varphi(t) := t \cdot (1+i)$$

ist das Kurvenintegral

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 f(t(1+i)) \cdot (1+i)\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2(1+i)^3\mathrm{d}t$$

$$= (-2+2i)\frac{1}{3}t^3 \Bigg|_0^1 = -\frac{2}{3}(1-i).$$

Man beachte dabei, dass φ kein geschlossener Weg ist.

2. Sei f wie in 1.; für den geschlossenen Weg φ

$$\varphi\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C} \text{ mit } \varphi(t) := re^{it} \text{ mit } r > 0 \text{ fest}$$

ist das Kurvenintegral Null nach Bem. 1.2.9. Wir überprüfen:

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} (re^{it})^2 ire^{it}\mathrm{d}t = ir^3 \int_0^{2\pi} e^{3it}\mathrm{d}t = \frac{ir^3}{3i}e^{3it} \Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

3. Für denselben geschlossenen Weg φ wie in 2. betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \text{ mit } f(z) := \frac{1}{z}.$$

f besitzt auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion, denn der komplexe Logarithmus $\log\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ ist nach Beispiel 1.1.7 nur auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ differenzierbar. Es gilt

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\mathrm{d}t = i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Lemma 1.2.11 (Übung)**.** Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein (stückweise stetig differenzierbarer) Weg. Dann gilt:

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \max_{z \in |\gamma|} |f(z)| L(\gamma),$$

wobei $L(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t$ die Weglänge ist.

Definition 1.2.12
Seien γ_0, γ_1 zwei auf demselben kompakten Intervall I definierte Kurven und U eine offene Menge in $\mathbb{C}$, die sowohl $\gamma_0(I)$ als auch $\gamma_1(I)$ umfasst.

1. *Eine* Homotopie *von γ_0 in γ_1 innerhalb von U ist eine stetige Abbildung*

$$\varphi\colon I \times [\alpha, \beta] \to U$$

   mit $\alpha < \beta$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass $\varphi(t, \alpha) = \gamma_0(t)$ und $\varphi(t, \beta) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in I$ gilt.

   Setzen wir zusätzlich voraus, dass beide Wege gleiche Anfangs- und Endpunkte haben, und dass die Homotopie Anfangs- und Endpunkte festlässt, so sprechen wir von einer Homotopie mit festen Endpunkten.

2. *Wenn es eine Homotopie von γ_0 in γ_1 innerhalb U gibt, so ist offenbar für jedes feste $\xi \in [\alpha, \beta]$ die Abbildung $t \mapsto \varphi(t, \xi)$ eine Kurve in U. Sind γ_0 und γ_1 geschlossene Kurven, so nennen wir φ eine* Konturhomotopie *von γ_0 in γ_1 innerhalb von U, falls $t \mapsto \varphi(t, \xi)$ für jedes $\xi \in [\alpha, \beta]$ eine* geschlossene *Kurve ist. Sagen wir, zwei* geschlossene *Kurven γ_0, γ_1 seien innerhalb U* homotop, *so soll das immer besagen, dass eine Konturhomotopie (und nicht nur eine Homotopie) existiert.*

3. *Ein (geschlossener) Weg, der homotop zu einem konstanten Weg ist, heißt auf diesen Punkt* zusammenziehbar. *Ein* einfach zusammenhängendes Gebiet *$U \subseteq \mathbb{C}$ ist eine wegzusammenhängende offene Menge mit der Eigenschaft, dass jeder geschlossene Weg in U innerhalb von U auf einen Punkt zusammenziehbar ist.*

Satz 1.2.13.
Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Die Relation "innerhalb von U homotop sein" ist eine Äquivalenzrelation von (geschlossenen) Wegen.

Beweis.

1. Die Reflexivität folgt aus der im zweiten Argument konstanten Homotopie $\varphi(t, \xi) = \gamma(t)$ für alle $\xi \in [\alpha, \beta]$.

2. Ist $\varphi\colon I \times [\alpha, \beta] \to U$ eine Homotopie von γ_0 auf γ_1, so ist,

$$(t, \xi) \mapsto \varphi(t, \alpha + \beta - \xi)$$

   eine Homotopie von γ_1 auf γ_0 in U. Das zeigt die Symmetrie.

3. Die Transivität sieht man folgendermaßen: Ist andererseits $\psi\colon I \times [\alpha', \beta'] \to U$ eine Homotopie von γ_1 auf γ_2 in U, so können wir eine Homotopie von γ_0 auf γ_2 in U definieren:

$$\begin{aligned} \theta\colon I \times [\alpha, \beta' + \beta - \alpha'] &\to U \\ \theta(t, \xi) &:= \begin{cases} \varphi(t, \xi) \text{ für } \alpha \leq \xi \leq \beta \\ \psi(t, \xi + \alpha' - \beta) \quad \text{für} \quad \beta \leq \xi \leq \beta' + \beta - \alpha' \end{cases} \end{aligned}$$

   Beide Vorschriften liefern die gleiche Funktion für $\xi = \beta$. Man überlegt sich leicht, dass die Vorschrift stetig ist, Werte in U annimmt und dass gilt $\theta(t, \alpha) = \gamma_0(t)$ und $\theta(t, \beta' + \beta - \alpha') = \gamma_2(t)$ für alle $t \in I$.

$\square$

Beispiel 1.2.14.

1. Jedes sternförmige Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend: Ist U sternförmig in Bezug auf den Punkt $a \in U$ und ist γ irgend eine geschlossene Kurve in U, dann ist

$$\varphi(t, \xi) = a + (1 - \xi)\,(\gamma(t) - a)$$

für $0 \leq \xi \leq 1$ eine Konturhomotopie von γ in eine auf den Punkt a reduzierte geschlossene Kurve.

2. Jede zu einer einfach zusammenhängenden Menge homöomorphe offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist wieder ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

3. Die punktierte komplexe Ebene $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend: Man betrachte etwa den Weg

$$\begin{array}{rcl} \varphi_n \colon [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ t & \mapsto & \exp(int) \end{array}$$

mit $n \neq 0$. (Es wird später noch klar werden, dass dieser Weg in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht zusammenziehbar sein kann.)

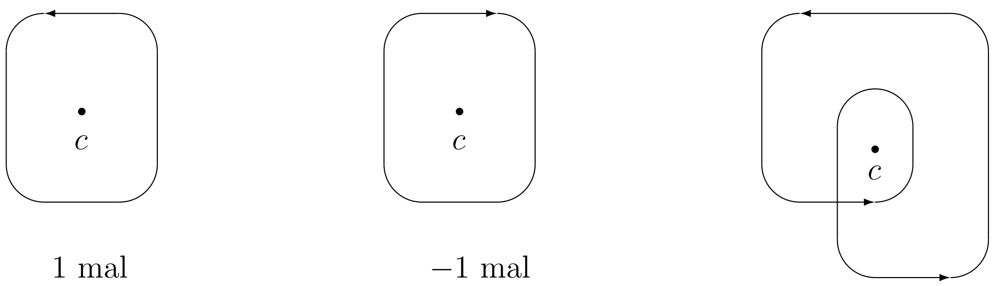
Bemerkungen 1.2.15.

1. Die Aneinanderreihung $\gamma \vee \gamma^{\leftarrow}$ von γ und $\gamma^{\leftarrow}$ ist stets ein geschlossener Weg, der homotop zu einer auf einen Punkt reduzierten Kurve ist.

2. Man überlegt sich, dass die Aneinanderreihung von Wegen auf Homotopieklassen assoziativ wird, aber nicht kommutativ.

3. Für ein der Homotopie ähnliches, aber nicht äquivalentes Konzept wird der Begriff *Homologie* verwendet. Grundlage hierfür ist die folgende Beobachtung: Für die Berechnung von Wegintegralen wird es es sehr nützlich sein, zu wissen, wieviele Male (in positiver Umlaufrichtung) ein geschlossener Weg γ um einen (oder mehrere) Punkte $c \notin |\gamma|$ herumläuft.

   Diese Information ist bereits durch die *Homologieklasse eines Weges* bestimmt: Homotopieklassen werden so zu Homologieklassen zusammengefügt, dass bei gegebenem fixierten Punkt $p \in U$ die Aneinanderreihung von Wegen mit Anfangs- und Endpunkt p auf Homologieklassen zu einer kommutativen Verknüpfung wird (die wir dann auch additiv schreiben werden), siehe Definition 1.2.17.



1 mal -1 mal   2 mal

4. Der Weg
$$\varphi_n\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_n(t) := e^{int},$$
dessen Bild der Einheitskreis $U(1) := \{z \in \mathbb{C} \| z| = 1\}$ ist, läuft n-mal um den Nullpunkt herum. Er heißt der *n-fach durchlaufene Einheitskreis*.
Für den Weg φ_n ist
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varphi_n} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{ine^{int}}{e^{int}}\mathrm{d}t = \frac{n}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}t = n.$$
Im folgenden Satz, den wir aus Zeitgründen nicht beweisen, berechnen wir analog diese "Windungszahl" $n \in \mathbb{Z}$ für beliebige Wege.

Satz 1.2.16 (und Definition)**.** Sei $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg und $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\zeta \notin |\varphi|$. Dann ist
$$j(\zeta;\varphi) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varphi} \frac{\mathrm{d}z}{z-\zeta}$$
eine ganze Zahl. Sie heißt *Index* oder die *Windungszahl* des Punktes ζ in Bezug auf den Weg φ oder auch *Index* des Weges φ in Bezug auf den Punkt ζ. Das Integral auf der rechten Seite ändert sich nicht, wenn man φ durch einen zu φ in $\mathbb{C} \setminus \{\zeta\}$ homotopen Weg $\tilde{\varphi}$ ersetzt.

Definition 1.2.17

1. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ und seien*
$$\varphi\colon [a,b] \longrightarrow U, \quad \psi\colon [a_1,b_1] \longrightarrow U$$
zwei geschlossene (stückweise stetig differenzierbare) Wege in U. Dann heißen φ und ψ homolog *in U, in Zeichen:*
$$\varphi \sim_U \psi, \text{ wenn}$$
$$\forall\, x \in \mathbb{C} \setminus U\colon j(x;\varphi) = j(x;\psi)$$
gilt, d.h. wenn φ und ψ um alle Punkte des Komplements von U gleich oft herumlaufen.
Ist ein geschlossener Weg φ in U homolog zu einem Weg φ_0, der nur aus einem Punkt $z_0 \in U$ besteht, so heißt φ nullhomolog *in U, man schreibt*
$$\varphi \sim_U 0.$$

2. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und*
$$\Gamma := ((\gamma_l, k_l))_{l \in \{1,\ldots,n\}}$$
eine Familie von Paaren von geschlossenen (stückweise stetig differenzierbaren) Wegen γ_l in U und ganzen Zahlen k_l. Man schreibt dafür
$$\Gamma = \sum_{l=1}^{n} k_l\gamma_l$$
und nennt Γ einen Zyklus *oder* Zykel *in U. Für stetiges $f\colon U \to \mathbb{C}$ setzt man*
$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z := \sum_{l=1}^{n} k_l \int\limits_{\gamma_l} f(z)\mathrm{d}z.$$

Man nennt $|\Gamma| := \bigcup_{l=1}^{n} |\gamma_l|$ *die* Spur *von* Γ, *und für* $c \in \mathbb{C}, c \notin |\Gamma|$ *nennt man*

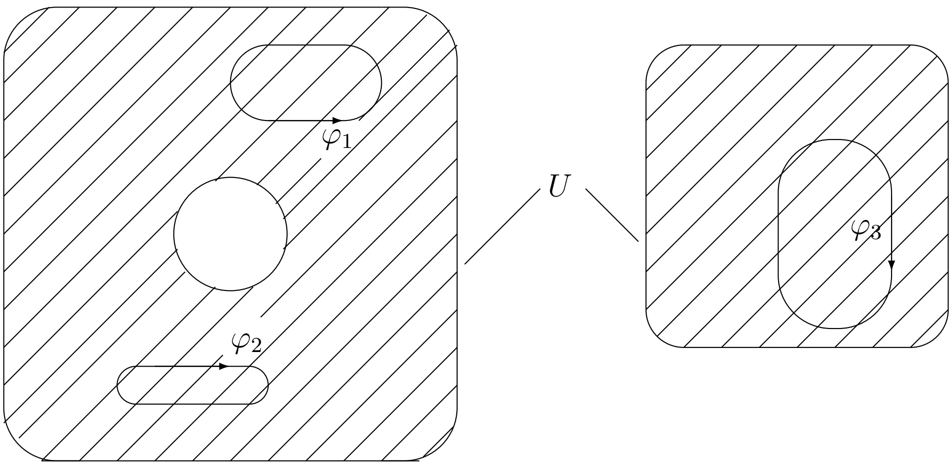
$$j(c;\Gamma) := \sum_{l=1}^{n} k_l j(c;\gamma_l)$$

den Index *von* c *bezüglich* Γ. *Es heißt* Γ nullhomolog in U , *wenn*

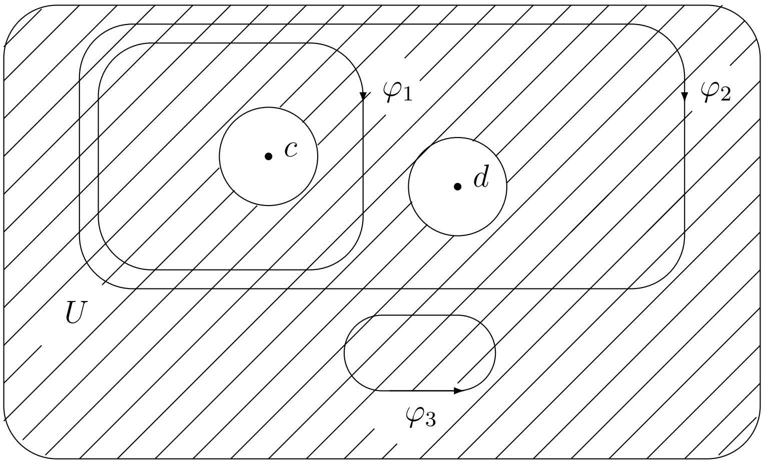
$$\forall\, c \in \mathbb{C} \setminus U\colon\, j(c;\Gamma) = 0 \text{ ist.}$$

Bemerkungen 1.2.18. Man kann zeigen, dass genau dann jede stückweise glatte geschlossene Kurve in einer zusammenhängenden offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ null-homolog ist, wenn jede glatte geschlossene Kurve in U zusammenziehbar ist [Sa, Korollar 5.19].

Beispiel 1.2.19. 1) Die folgenden Wege sind in U nullhomolog:



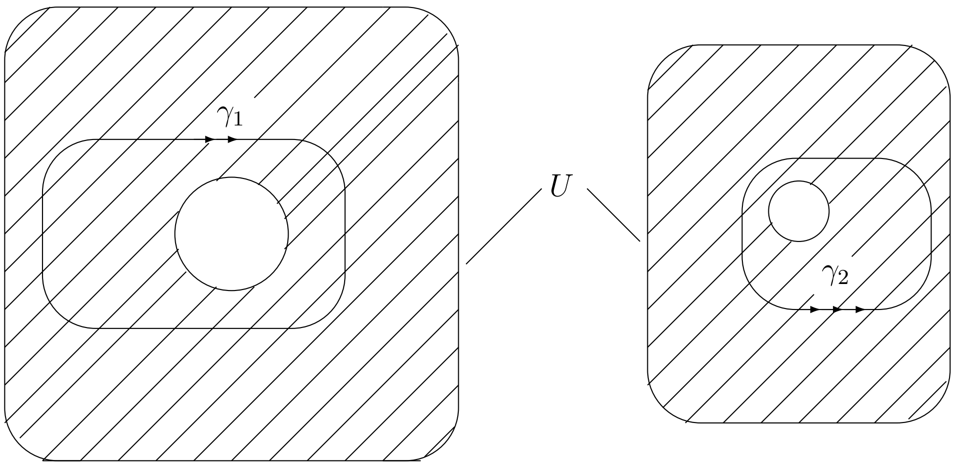
2) Es gilt
$j(c;\varphi_1) = -1, j(c;\varphi_3) = 0$, also $\varphi_1 \not\sim_U \varphi_3$



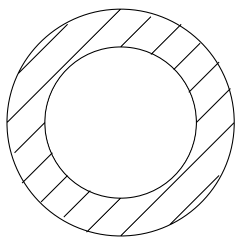
$$j(d;\varphi_1) = 0, j(d;\varphi_2) = -1, \text{ also } \varphi_1 \not\sim_U \varphi_2,$$
$$j(d;\varphi_2) = -1, j(d;\varphi_3) = 0, \text{ also } \varphi_2 \not\sim_U \varphi_3.$$

3) Wir können statt über einzelne Wege in U also auch über Zyklen integrieren, die keine Wege sind, wie z. B.

$$2\gamma_1 + 3\gamma_2$$



Bemerkungen 1.2.20. Ist U berandet durch Wege γ_l, so dass (bezüglich des Umlaufsinns der Wege) U stets links liegt, so schreiben wir für das Integral über den durch $\sum_l \gamma_l$ gegebenen Zyklus kurz $\int\limits_{\partial U}$, vgl. (1.2.8).



1.3 Cauchyscher Integralsatz und Integralformel

Bemerkungen 1.3.1. Wir wollen uns nun überlegen, dass es bei der Berechnung von Wegintegralen von einem geschlossenen Weg nur auf die umschlossenen "Singularitäten" ankommt, also auf die Punkte, in denen f nicht komplex differenzierbar (bzw. nicht definiert) ist.

Gibt es zu $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion auf U, so ist das Wegintegral von f für jeden geschlossenen Weg in U Null, siehe (1.2.9).

Sei f komplex differenzierbar. Dann betrachten wir die komplexwertige Einsform

$$\omega = f\mathrm{d}z = (u + iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$$

auf U, wobei u, v reellwertige Funktionen sind. Dann folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= (u_y + iv_y)(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x) + i(u_x + iv_x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= (-u_y - v_x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + i(-v_y + u_x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0 \end{aligned}$$

Wir erinnern an das Lemma von Poincaré: Über jeder sternförmigen offenen Menge ist jede stetig differenzierbare geschlossene k-Form ($k \geq 1$) auch exakt.

Und wir erinnern an die Integralsätze: Sei $\bar{A}$ (hinreichend) glatt berandetes Kompaktum in $\mathbb{R}^2$, A offen, ∂A der orientierte Rand von A. Nach dem Satz von Stokes ist für jede auf einer Umgebung von $\bar{A}$ definierte stetig differenzierbare 1-Form:

$$\int\limits_{\partial A} \omega \quad = \quad \int\limits_{A} \mathrm{d}\omega$$

Wir folgern (mit Lücken: unter anderem muss man die Stetigkeit der Ableitung komplex-differenzierbarer Funktionen zeigen) hieraus für $\omega = f(z)\mathrm{d}z$, bei holomorphem f:

$$\int\limits_{\partial A} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{A} \mathrm{d}(f(z)\mathrm{d}z) = \int\limits_{A} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}_{0} \underbrace{\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z}_{2i\ dx \wedge dy} = 0.$$

Indem man noch für Zyklen argumentiert, und insbesondere Wege aneinanderreiht, kommt man zum folgenden für die Funktionentheorie zentralen Satz (siehe z.B. [FL]).

Theorem 1.3.2 (Cauchyscher Integralsatz)**.**
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $U \neq \emptyset$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und Γ ein in U nullhomologer Zyklus. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Speziell gilt: Ist U einfach zusammenhängend, so ist $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in U.

Zum Beweis: Wir betrachten den Fall, dass die komplexe Ableitung der Funktion f auch stetig ist, und dass der Zyklus Γ durch einen einzigen Weg $\gamma\colon [a,b] \to U$ gegeben ist, der im mathematisch positiven Sinn als Randweg ein Gebiet S umläuft.

In dieser Situation kann der (in der MfP III bewiesene) Satz von Green

$$\int_a^b \big(F_1(\gamma(t)), F_2(\gamma(t))\big)\begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \gamma_2'(t)\end{pmatrix} dt = \int_S \left(\frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y)\right) dxdy$$

(F ein C^1-Vektorfeld auf U, S: die von Γ umlaufene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$) verwendet werden:

Das Weg-Integral $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$ kann mit Hilfe von $f = u + i\,v$ und $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ als Summe von zwei reellen Wegintegralen geschrieben werden

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z &= \int_a^b \big(u(\gamma(t)) + i\,v(\gamma(t))\big)\big(\gamma_1'(t) + i\,\gamma_2'(t)\big)dt \\ &= \int_a^b \big(u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))\big)\begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \gamma_2'(t)\end{pmatrix} dt + i\int_a^b \big(v(\gamma(t)), u(\gamma(t))\big)\begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \gamma_2'(t)\end{pmatrix} dt. \qquad (3)\end{aligned}$$

Für Real- und Imaginärteil von (3) kann dann jeweils der Satz von Green angewendet werden. Damit ergibt sich:

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_S \big(-v_x(x,y) - u_y(x,y)\big)dxdy + i\int_S \big(u_x(x,y) - v_y(x,y)\big)dxdy$$

Beide Terme verschwinden aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Es existieren Beweise, die nicht die stetige Differenzierbarkeit von f voraussetzen [Ah, Sa]. Mithilfe des Cauchyschen Integralsatzes werden wir zeigen, dass sich aus komplexer Differenzierbarkeit die Existenz aller höheren Ableitungen ergibt. Insbesondere sind die Ableitungen komplex differenzierbarer Funktionen also immer stetig. □

Korollar 1.3.3. Sei U offen in $\mathbb{C}$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, und Γ_1, Γ_2 seien in U homologe Zyklen, d.h. $j(c;\Gamma_1) = j(c;\Gamma_2) \quad \forall c \in \mathbb{C} \setminus U$. Dann gilt:

$$\int\limits_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

Beweis.
Seien

$$\Gamma_1 = \sum_{l=1}^{n} k_l\gamma_l \text{ und } \Gamma_2 = \sum_{l=n+1}^{n+m} (-k_l)\gamma_l$$

zwei in U homologe Zyklen, dann ist

$$\Gamma := \Gamma_1 - \Gamma_2 = \sum_{l=1}^{n+m} k_l\gamma_l$$

nullhomolog in U, und aus

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0 \text{ folgt die Behauptung.}$$

□

Beispiel 1.3.4. Sei $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0,-2\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{1}{z(z+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z+2}\right)$. Ist φ ein beliebiger geschlossener Weg, der $\{0,-2\}$ nicht trifft und der Windungszahl 0 um $c_1 = -2$ und Windungszahl $2n$ um $c_2 = 0$ hat, so stimmt das Integral $\int\limits_{\varphi} f(z)\mathrm{d}z$ überein mit $2\pi i n$, der Hälfte des Integrals von $\dfrac{1}{z}$ über den $2n$-fach durchlaufenen Einheitskreis.

Korollar 1.3.5. Es seien γ_1 und γ_2 zwei Wege in einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ mit dem gleichen Anfangspunkt u und dem gleichen Endpunkt v. Es gebe ferner eine Homotopie

$$\varphi\colon [a,b] \times [\alpha,\beta] \to U$$

von γ_1 in γ_2 innerhalb von U, welche Anfangs- und Endpunkte festlässt, d. h. $\varphi(a,\xi) = u$ und $\varphi(b,\xi) = v$ für alle $\xi \in [\alpha,\beta]$. Dann gilt für jede auf U holomorphe Funktion f die Beziehung

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

Beweis.
Der Weg $\gamma_3(t) := \gamma_1^{\leftarrow}(t-b+a)$ mit $t \in [b, 2b-a]$ ist zu $\gamma_1^{\leftarrow}$ äquivalent. Die Aneinanderreihungen $\gamma_1 \vee \gamma_3$ und $\gamma_2 \vee \gamma_3$ sind jeweils geschlossene Wege. Sie sind auch in U homotop:

$$\psi(t,\xi) := \begin{cases} \varphi(t,\xi) \text{ für } a \le t \le b, \\ \gamma_3(t) \text{ für } b \le t \le 2b-a, \end{cases}$$

ist ein Konturhomotopie innerhalb von U. Der Cauchysche Integralsatz 1.3.2 bzw. Korollar 1.3.3 liefert

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z$$

und damit die Behauptung. □

Wir halten noch fest:

Bemerkungen 1.3.6.

1. Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Der Index $j(\cdot;\gamma)$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente des Komplements $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ der kompakten Menge $\gamma(I)$ konstant.

2. Ist ein geschlossener Weg γ in einer abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B_r(z_0)}$ enthalten, so ist $j(z;\gamma) = 0$ für jedes z mit $|z - z_0| > r$.

Definition 1.3.7 *Sei U offen in $\mathbb{C}$, $\zeta \in U$ und $f\colon U \setminus \{\zeta\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt ζ* hebbare Singularität *von f, wenn es eine Umgebung $B_\varepsilon(\zeta) \subseteq U$ von ζ gibt, so dass f auf $B_\varepsilon(\zeta) \setminus \{\zeta\}$ definiert, beschränkt und differenzierbar ist.*

Beispiel 1.3.8. 1) Sei $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $\quad f(z) := e^{\frac{1}{z}}$, so ist 0 keine hebbare Singularität von f, denn wegen $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ x\in\mathbb{R}}} e^x = \infty$ gibt es keine Umgebung U von 0, so dass f in $U \setminus \{0\}$ beschränkt ist.

2) Sei $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $\quad f(z) := \dfrac{\sin z}{z}$. Dann ist 0 eine hebbare Singularität von f: Wegen

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\neq 0}} \frac{\sin z}{z} = \lim_{\substack{z\to 0 \\ z\neq 0}} \frac{\sin z - \sin 0}{z - 0} = \cos 0$$

gibt es zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$\left|\frac{\sin z}{z} - 1\right| < 1, \text{ also } \left|\frac{\sin z}{z}\right| < 2 \text{ für } z \in B_\delta(0).$$

(Es stellt sich heraus, dass man f in jeder hebbaren Singularität stetig ergänzen kann.)

Bemerkungen 1.3.9 (Übung)**.** Sei U offen in $\mathbb{C}$, $\zeta \in U$,

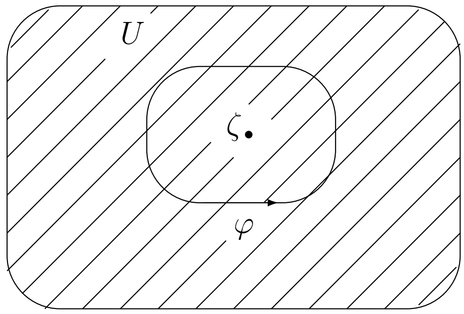
$$f\colon U \setminus \{\zeta\} \to \mathbb{C}$$

sei differenzierbar und ζ sei eine hebbare Singularität von f. Sei

$$\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$$

ein geschlossener Weg mit $|\varphi| \subseteq U \setminus \{\zeta\}$. Es sei φ nullhomolog in U. Dann ist

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = 0.$$



Dies folgert man mit Hilfe der Formel aus (1.2.11).

Theorem 1.3.10 (Cauchysche Integralformel)**.** Sei U offen in $\mathbb{C}$, φ ein geschlossener Weg in U, und φ sei nullhomolog in U. Weiterhin sei $\zeta \in U$, $\zeta \notin |\varphi|$. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varphi} \frac{f(z)}{z-\zeta} \mathrm{d}z = j(\zeta;\varphi) \cdot f(\zeta).$$

Hierbei wird für die Windungszahl $j(\zeta;\varphi)$ die offene Menge $U \setminus \{\zeta\}$ betrachtet.
Die Aussage gilt analog auch für Zykel Γ statt Wege φ.

Beweis.
Wir beweisen den Spezialfall $\Gamma = \varphi$. (Für den allgemeinen Satz, siehe z.B. [FL]).

Es ist $g(z) := \dfrac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$ auf $U \setminus \{\zeta\}$ definiert und holomorph. Es existiert

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \neq \zeta}} g(z) = f'(\zeta),$$

also gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $\tilde{U}$ von ζ, so dass gilt

$$z \in \tilde{U} \setminus \{\zeta\} \Longrightarrow |g(z) - f'(\zeta)| < \varepsilon,$$

also $|g(z)| < |f'(\zeta)| + \varepsilon$ für $z \in \tilde{U} \setminus \{\zeta\}$. Damit ist also g auf $\tilde{U} \setminus \{\zeta\}$ beschränkt und ζ ist somit hebbare Singularität von g. Deshalb ist

$$\int\limits_{\varphi} g(z) \mathrm{d}z = 0, \text{ also}$$

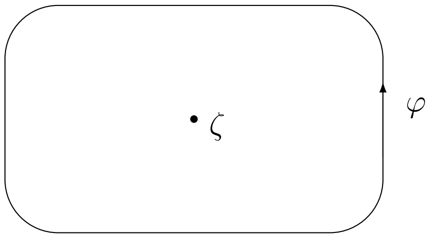
$$\int\limits_{\varphi} \frac{f(z)}{z-\zeta} \mathrm{d}z = \int\limits_{\varphi} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} \mathrm{d}z$$

und die rechte Seite ist, nach (1.2.16), gleich

$$f(\zeta) \cdot 2\pi i \cdot j(\zeta;\varphi).$$

□

Bemerkungen 1.3.11. 1) Die Formel ist oft nützlich, um Integrale auszurechnen.
2) Ist $j(\zeta;\varphi) \neq 0$, so gilt



$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i \cdot j(\zeta;\varphi)} \int\limits_{\varphi} \frac{f(z)}{z-\zeta} \mathrm{d}z,$$

d.h. man kann den Funktionswert $f(\zeta)$ einer holomorphen Funktion f in einem Punkt ζ im Inneren von $|\varphi|$ ausrechnen, wenn man $f(z)$ für $z \in |\varphi|$, also auf dem Rand der von φ eingeschlossenen Menge, kennt.

Betrachtet man eine holomorphe Funktion f und eine Kreisscheibe um ζ, so ist $f(\zeta)$ insbesondere durch ein Mittel über den Rand der Kreisscheibe festgelegt; ein entsprechender Satz gilt allgemein für harmonische Funktionen (vgl. MfP III 4.2.1), und es sind ja nach Korollar 1.1.6 die beiden reellwertigen Funktionen Ref und Imf harmonisch, wenn f zweimal stetig differenzierbar ist.

Theorem 1.3.12. Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f komplex-analytisch. Genauer: Sei $z_0 \in U$ und $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, so dass $B_\rho(z_0) \subseteq U$ ist, dann gibt es eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit einem Konvergenzradius $\geq \rho$, so dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ für alle } z \in B_\rho(z_0),$$

und für jedes r mit $0 < r < \rho$ gilt

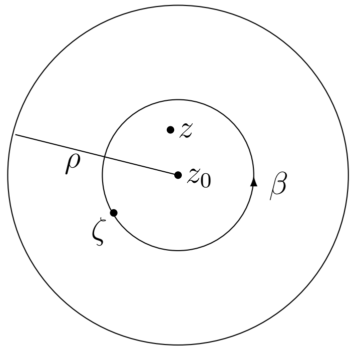
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z,$$

wobei $\partial B_r(z_0)$ der einmal positiv durchlaufene Rand von $B_r(z_0)$ ist. Des Weiteren gilt für die Koeffizienten a_n die Abschätzung:

$$|a_n| \leq \frac{M_r}{r^n} \text{ mit } M_r := \max\left\{|f(\zeta)|, \zeta \in \overline{B_r(z_0)}\right\}$$

für jedes r mit $0 < r < \rho$.

Beweis.
Für $z \in B_\rho(z_0)$ wählen wir ein festes r mit $|z - z_0| < r < \rho$ und betrachten den Weg $\beta\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \beta(t) := z_0 + re^{it}$.



Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\beta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{4}$$

Für $\zeta \in |\beta|$ ist $|\zeta - z_0| = r > |z - z_0|$. In dem Fall ist:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \quad \text{für} \quad |z - z_0| < |\zeta - z_0|. \tag{5}$$

Man sieht nun leicht, dass ein wesentlicher Teil der Behauptung folgen würde, wenn man den Integranden auf der rechten Seite von (4) mithilfe von (5) als eine Potenzreihe in Potenzen von $z - z_0$ darstellt, und die Integration mit der Summation vertauschen dürfte,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\beta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_\beta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n a_n.$$

Um die Vertauschbarkeit von Summation und Integration zu zeigen, sehen wir uns das Integral in (4) etwas genauer an:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n f(\beta(t))}{(\beta(t) - z_0)^{n+1}} \cdot \beta'(t) \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \right) \mathrm{d}t, \qquad g_n(t) := \frac{(z - z_0)^n f(z_0 + re^{it}) \cdot i}{r^n e^{int}} \end{aligned}$$

Die Funktion f ist in $B_\rho(z_0)$ holomorph, insbesondere stetig, also auf der kompakten Menge $\overline{B_r(z_0)}$ beschränkt:

$$|f(\zeta)| \leq M_r \text{ für } \zeta \in \overline{B_r(z_0)}.$$

Daher ist

$$|g_n(t)| \leq \frac{|z - z_0|^n M_r}{r^n} = M_r \Bigg(\underbrace{\frac{|z - z_0|}{r}}_{<1} \Bigg)^n$$

Für $t \in [0, 2\pi]$ sind die Summanden $g_n(t)$ beschränkt und es existiert eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |g_n(t)|$, also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)$ gleichmäßig und absolut auf $[0, 2\pi]$, und wir können Summation und Integration vertauschen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(z - z_0)^n f(re^{it} + z_0) i}{r^n e^{int}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\beta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta,$$

wobei dieses Integral unabhängig von r ist für $r < \rho$.
Die letzte Aussage des Satzes folgt aus der Formel für a_n im Beweis oben:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

mit der Abschätzungsformel (1.2.11), wobei $L(\beta) = 2\pi r$. □

Korollar 1.3.13.

1. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ einmal komplex differenzierbar. Dann ist die Funktion f in U beliebig oft komplex differenzierbar und somit beliebig oft stetig differenzierbar. Es folgt auch, dass Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion harmonische glatte reellwertige Funktionen sind.

2. Die Nullstellenmenge jeder über einem Gebiet A nicht konstanten holomorphen Funktion besitzt in A keine Häufungspunkte.

Beweis.
Nach Satz 1.3.12 ist f in jedem $z \in U$ analytisch,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z).$$

Nach Satz 1.1.10 ist

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - a)^{n-1},$$

und wir erhalten erneut eine komplex differenzierbare Funktion auf U. Aus dem Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen analytischer Funktionen 1.1.19 folgt auch die zweite Behauptung. □

Satz 1.3.14 (Cauchysche Integralformel für die Ableitungen)**.** Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $\rho > 0$ mit $\overline{B_\rho(z_0)} \subseteq U$. Dann gilt für $r < \rho$:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

oder allgemeiner, für einen in U nullhomologen Zyklus Γ mit $z_0 \notin |\Gamma|$:

$$j(z_0; \Gamma) \cdot f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z.$$

(Wieder wird für $j(z_0; \Gamma)$ die Menge $U \setminus \{z_0\}$ betrachtet.)

Beweis.
Wieder für den Spezialfall $\Gamma = \varphi = \partial B_r(z_0)$: Mit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ für $|z - z_0| < \rho$ und der Formel aus 1.3.12 folgt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \text{ für jedes } r \text{ mit } 0 < r < \rho.$$

Aus Satz 1.1.10 erhält man $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ und die Behauptung. □

Bemerkungen 1.3.15. Es gibt offenbar nicht konstante reell-differenzierbare Funktionen wie z.B. $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und beschränkt sind. Aus der Abschätzungsformel für die Koeffizienten a_n im Satz (1.3.12) erhält man jedoch für komplex-differenzierbare Funktionen den folgenden Satz.

Satz 1.3.16 (Satz von Liouville)**.** Jede auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe beschränkte Funktion mit Werten in $\mathbb{C}$ (oder allgemeiner einem komplexen Banachraum E) ist konstant.

Beweis.
Ist f auf $\mathbb{C}$ beschränkt, so gibt es ein $M \in \mathbb{R}_+$ mit

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Da f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, hat man für jedes $\rho > 0$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ für } |z| < \rho,$$

die nach dem Cauchyschen Integralsatz nicht von ρ abhängt, also gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ mit } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z,$$

für beliebiges $r > 0$. Aus der Abschätzungsformel (1.2.11) wissen wir

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Da hier r beliebig groß gewählt werden kann, folgt

$$|a_n| = 0 \quad \forall\, n \geq 1,$$

Also $f(z) = a_0$. □

Mit Hilfe des Satzes von Liouville erhält man einen kurzen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra (siehe MfP I):

Korollar 1.3.17 (Fundamentalsatz der Algebra)**.**
Es sei $P(z)$ ein nicht-konstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten. Dann hat $P(z)$ eine komplexe Nullstelle.

Beweis.
Beweis durch Widerspruch: Die allgemeine Aussage folgt leicht aus dem Fall, dass $P(z)$ die Form $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$ mit $n \geq 1$ hat. Angenommen, es gilt $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \frac{1}{P(z)}$$

nach der Quotientenregel in ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Wir setzen

$$R := 2n \cdot \max\left\{|a_0|, \dots, |a_{n-1}|, \frac{1}{2n}\right\} \geq 1,$$

Als stetige Funktion ist f auf jeder kompakten Menge beschränkt, insbesondere auf der kompakten Menge $\overline{B_R(0)}$. Auch außerhalb dieser Kreisscheibe ist $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ beschränkt, denn $P(z)$ lässt sich für $|z| \geq R$ wie folgt abschätzen:

$$|P(z)| \geq |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k \geq |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|z|}{2n}|z|^k \geq |z|^n - n \cdot \frac{|z|^n}{2n} = \frac{|z|^n}{2} \geq \frac{R^n}{2},$$

$$\text{also} \quad \frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{2}{R^n} \quad \text{für} \quad |z| \geq R.$$

(Im ersten Schritt benutzen wir die Dreiecksungleichung, im zweiten Schritt $|a_k| \leq R/2n \leq |z|/2n$ für $k = 1, \dots, n-1$, was aus der Definition von R und $R \leq |z|$ folgt, und im dritten Schritt $|z|^k \leq |z|^n$ für $k < n$.)

Nach dem Satz von Liouville ist f konstant in $\mathbb{C}$ und damit auch P. Aber P hat Grad $n \geq 1$, kann somit nicht konstant sein. Aus dem Widerspruch folgt die Existenz einer Nullstelle. $\square$

1.4 Laurentzerlegung

Der Satz von Liouville zeigt, dass es “wenige” holomorphe Funktionen gibt; zum Beispiel gibt es wenige auf $\mathbb{C}$ doppelt-periodische Funktionen. Es ist daher wichtig, eine größere Funktionenklasse zur Verfügung zu haben. Dazu lassen wir einzelne Punkte einem Gebiet der komplexen Ebene zu, an denen eine holomorphe Funktion nicht definiert sein muss, sogenannte *isolierte Singularitäten.*

Definition 1.4.1

1. *Unter einer unendlichen Reihe der Form* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ *versteht man das Paar von Reihen*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\right).$$

Eine solche Reihe heißt konvergent, wenn die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ *konvergieren. Dann heißt ihre Summe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ *der Grenzwert von* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$.

2. *Analog führt man die Begriffe der absoluten und der gleichmäßigen Konvergenz für solche Reihen ein.*

3. *Eine* Laurentreihe *mit Entwicklungspunkt* $z_0 \in \mathbb{C}$ *und Werten in* $\mathbb{C}$ *ist, wie in 1.), gegeben durch die Reihe bzw. Reihen*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^n}_{h} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{g}, \text{ mit } a_n \in \mathbb{C},$$

welche man Hauptteil *(h) bzw.* Nebenteil *(g) nennt. Insbesondere: Die Laurentreihe heißt konvergent in z, wenn sowohl der Haupt- als auch der Nebenteil in z konvergieren.*

Bemerkungen 1.4.2. Bei einer Laurentreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ist der Nebenteil eine Potenzreihe in $z - z_0$ und es gibt einen Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$, so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ für } |z-z_0| < R \text{ konvergiert,}$$

und der Hauptteil ist eine Potenzreihe in $\zeta := \frac{1}{z-z_0}$, es gibt also einen Konvergenzradius $\rho \in [0, \infty]$ von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$, d. h. für $r := \frac{1}{\rho} \in [0, \infty]$ konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \quad \text{wenn} \quad |z-z_0| > r.$$

Insgesamt haben wir also ein (eventuell leeres) *Ringgebiet*

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} | r < |z-z_0| < R\},$$

in dem die Laurentreihe konvergiert. Des Weiteren gilt:
(i) Es seien r', R' mit $r < r' < R' < R$, dann konvergiert die Laurentreihe in der Menge $\{z \in \mathbb{C} | r' \leq |z-z_0| \leq R'\}$ gleichmäßig.
(ii) Für $|z-z_0| < r$ oder $|z-z_0| > R$ divergiert die Laurentreihe.

Mit (i) erhält man:

Korollar 1.4.3. Die Laurentreihe $f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergiere im Kreisring

$$K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} | r < |z-z_0| < R\}.$$

Dann ist durch f dort eine komplex differenzierbare Funktion gegeben, mit

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Ist $a_{-1} = 0$, so ist

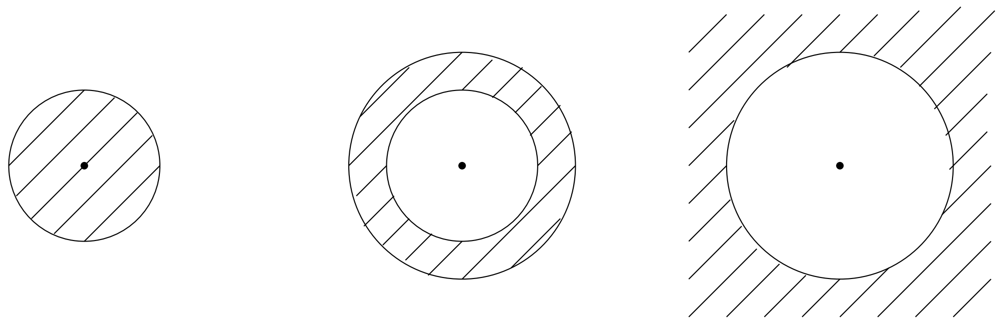
$$F(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} \text{ für } z \in K_{r,R}(z_0)$$

eine Stammfunktion von f.

Beispiel 1.4.4. Sei

$$f(z) := \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}\right).$$

Mit der geometrischen Reihe erhält man für die drei Kreisringe um 0, in denen f holomorph ist, die folgenden Laurent-Entwicklungen:



$K_{0,1}(0)$ $K_{1,2}(0)$ $K_{2,\infty}(0)$

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1-z/2} = \sum_{n=-1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) z^n \quad \text{in} \quad K_{0,1}(0),$$

$$f(z) = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+2}} \quad \text{in} \quad K_{1,2}(0),$$

$$f(z) = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-2/z} = -\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n-2}-1}{z^n} \quad \text{in} \quad K_{2,\infty}(0).$$

Satz 1.4.5 (Integralformel für die Laurentkoeffizienten)**.** Konvergiert $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ im Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ gegen die Funktion f, so gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

für jeden kreisförmigen Weg

$$\kappa_\rho \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \kappa_\rho(t) := z_0 + \rho e^{it}, \text{ mit } \rho \in (r, R).$$

Beweis.
Nach Folgerung 1.4.3 besitzt

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} - \frac{a_n}{z-z_0}$$

eine Stammfunktion in $K_{r,R}(z_0)$, also ist

$$0 = \int_{\kappa_\rho} g(z)\mathrm{d}z = \int_{\kappa_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta - a_n \int_{\kappa_\rho} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_0}.$$

Mit $\int_{\kappa_\rho} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z_0} = 2\pi i$ folgt die Behauptung. □

Für Folgerung 1.4.3 gilt auch die Umkehrung:

Satz 1.4.6. Jede in einem Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ holomorphe Funktion f besitzt in diesem eine Laurententwicklung

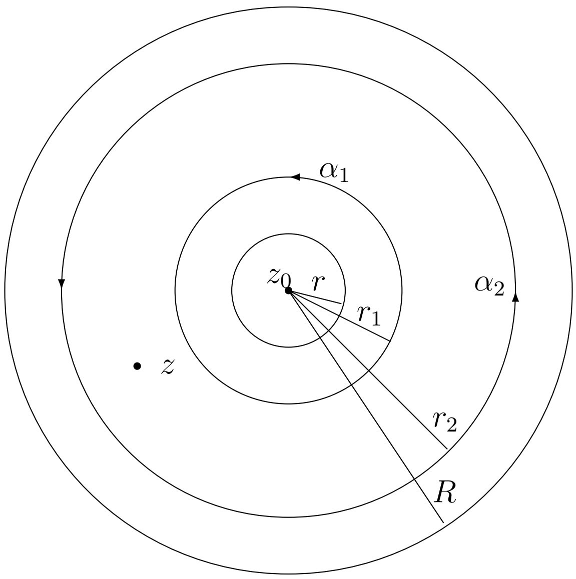
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta, \quad n \in \mathbb{Z},$$

wobei $\rho \in (r, R)$ und

$$\kappa_\rho \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \kappa_\rho(t) := z_0 + \rho e^{it}.$$

Wie in Satz (1.4.5) gilt hierbei die Eindeutigkeit der Entwicklung bzw. der Koeffizienten a_n.

Beweis.
Sei $z \in K_{r,R}(z_0)$, dann wählen wir r_1, r_2 mit $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$



und den Zyklus

$$\Gamma := \alpha_2 - \alpha_1 \text{ mit } \alpha_j \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \alpha_j(t) := z_0 + r_j e^{it}.$$

Bezüglich $K_{r,R}(z_0) \setminus \{z\}$ ist $j(z; \Gamma) = j(z; \alpha_2) = 1$, und nach der Cauchyschen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta,$$

denn Γ ist nullhomolog in $K_{r,R}(z_0)$, also

$$f(z) = g(z) + h(z), \qquad g(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta, \qquad h(z) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

Hauptteil: Für $\zeta \in |\alpha_1|$ haben wir

$$|\zeta - z_0| = r_1, \quad |z - z_0| > r_1, \quad \text{also} \quad \left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1,$$

und wir können $-\frac{1}{\zeta - z}$ folgendermaßen in *negative* Potenzen von $\frac{1}{z - z_0}$ entwickeln:

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^{p-1}}{(z - z_0)^p}.$$

eine auf $\{\zeta \in \mathbb{C} | \zeta \in |\alpha_1|\}$ gleichmäßig konvergente Reihe. Wir haben also

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \sum_{p=1}^{\infty} b_p(z - z_0)^{-p} \quad \text{mit} \quad b_p := \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_1} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{p-1}\mathrm{d}\zeta.$$

Wir setzen $a_{-n} := b_n$ für $n \in \mathbb{N}$; das ergibt den Hauptteil der Laurentreihe.

Nebenteil: Für $\zeta \in |\alpha_2|$ benutzen wir eine Entwicklung in positive Potenzen von $z - z_0$:

$$|\zeta - z_0| = r_2, \quad |z - z_0| < r_2, \quad \text{also} \quad \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1,$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \qquad \text{und somit}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{mit} \quad a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta.$$

Das ergibt den Nebenteil der Laurentreihe. Da man r_2 beliebig nahe an R und r_1 beliebig nahe an r wählen kann, und da die a_n nach (1.4.5) eindeutig bestimmt sind, folgt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ für } r < |z - z_0| < R,$$

und da sich die Integrale über α_1 und α_2 nicht ändern, wenn man r_1 und r_2 innerhalb von (r, R) ändert, folgt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

mit beliebigem $\rho \in (r, R)$. □

Beispiel 1.4.7. Die gebrochen rationale Funktion

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}$$

ist auf $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$ definiert. Wir können sie schreiben als

$$f(z) = \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{z - 3}.$$

Wir suchen die Laurententwicklung von f auf dem Ringgebiet $K_{1,3}(0)$. Für $|z| > 1$ gilt

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Für $|z| < 3$ gilt dagegen

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Auf dem Ringgebiet $K_{1,3}(0)$ ist somit $f(z) = g(z) + h(1/z)$, mit der für $|z| < 1$ konvergenten Reihe

$$h(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

und der für $|z| < 3$ konvergenten Reihe

$$g(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Bemerkungen 1.4.8. Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und z_0 ein isolierter Punkt von $\{z_0\} \cup (\mathbb{C} \setminus U)$; ohne Einschränkung betrachten wir eine punktierte Umgebung $\dot{U}$ der Form $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ von z_0, die keine weiteren Punkte von $\mathbb{C} \setminus U$ trifft. Es sei

$$f\colon \dot{U} \to \mathbb{C}$$

holomorph. Wir wollen die Art der "isolierten Singularität" z_0 näher beschreiben. Zunächst: z_0 kann eine hebbare Singularität sein, siehe (1.3.7). Ist z_0 hebbar, so kann f holomorph in z_0 fortgesetzt werden:

Satz 1.4.9 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen $z_0 \in U$ und $f\colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Es sei z_0 eine hebbare Singularität von f. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ mit

$$g|_{U \setminus \{z_0\}} = f.$$

Beweis.
Nach der Definition hebbarer Singularitäten gibt es ein $r > 0$, so dass f in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist, etwa $|f(z)| \leq M$ für $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Wir setzen

$$\varphi\colon U \to \mathbb{C}, \quad \varphi(z) := \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z) & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Dann ist φ in $U \setminus \{z_0\}$ differenzierbar, und auch in z_0, denn es existiert

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} (z - z_0) \cdot f(z) = 0$$

wegen $|f(z)| \leq M$ für $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, also ist

$$\varphi'(z_0) = 0.$$

Daher hat φ in $B_r(z_0)$ eine Potenzreihenentwicklung

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit $a_0 = \varphi(z_0) = 0$ und $a_1 = \varphi'(z_0) = 0$. Somit ist $\varphi(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$,

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2} \text{ für } z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\},$$

und $g(z) := \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2}$ ist die gesuchte Fortsetzung von f. □

Definition 1.4.10 *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ sei in einer (punktierten) Umgebung von $z_0 \in U$ holomorph. Wir definieren im Folgenden die* Ordnung $\omega(z_0; f)$ *von z_0 bezüglich f und unterscheiden dabei drei Fälle.*

1. *Ist z_0 hebbare Singularität oder ist f in z_0 holomorph, so definieren wir $\omega(z_0; f)$ durch die Nullstellenordnung von z_0. Genauer: Existiert eine Umgebung von z_0, auf der f konstant 0 ist, setzen wir $\omega(z_0; f) = \infty$. Ist m die größte natürliche Zahl k für die $(z - z_0)^{-k} \cdot f(z)$ in z_0 holomorph fortsetzbar ist, so ist $\omega(z_0; f) = m$.*

2. *Wir nennen z_0 einen* Pol *von f, wenn z_0 nicht hebbar ist, aber eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass z_0 eine hebbare Singularität von $(z - z_0)^k \cdot f(z)$ ist. Das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit dieser Eigenschaft heißt die* Polstellenordnung *von z_0. In dem Fall, dass z_0 ein Pol der Ordnung $k \geq 1$ ist, definieren wir $\omega(z_0; f) = -k$. (Man beachte das Vorzeichen: Für Pole ist $\omega(z_0; f)$ negativ.)*

3. *Wir nennen z_0 einen* wesentlich singulären Punkt *oder eine* wesentliche Singularität *von f, wenn z_0 weder hebbar noch ein Pol ist. Wenn z_0 eine wesentliche Singularität von f ist, dann setzen wir $\omega(z_0; f) = -\infty$.*

Beispiel 1.4.11. Die Funktion $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$, die auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert ist, hat in $z = 0$ einen Pol der Ordnung 2.

Bemerkungen 1.4.12 (*Laurentzerlegung*)**.** Sei U offen in $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, $f\colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine isolierte Singularität von f. Dann hat man eine Laurent-Entwicklung von f um z_0 in $K_{0,R}(z_0)$:

$$f(z) = \varphi(z) + h(z),$$

wobei $\varphi(z)$ der Nebenteil und $h(z)$ der Hauptteil ist, also

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Die Koeffizienten der Laurentreihe sind eindeutig bestimmt, siehe (1.4.5). Deshalb gilt:

1.) z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn $h = 0$ ist.

2.) z_0 ist genau dann ein Pol von f, wenn h eine von 0 verschiedene endliche Summe ist, und zwar ist z_0 genau dann ein Pol der Ordnung k, wenn gilt

$$h(z) = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \text{ mit } a_{-k} \neq 0.$$

3.) z_0 ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn unendlich viele $a_{-n}, n \in \mathbb{N}$ im Hauptteil $h(z)$ ungleich 0 sind.

Man zeigt leicht:

Lemma 1.4.13.

1. Sind sowohl f als auch g auf $\dot{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid \ 0 < |z - z_0| < r\}$ definierte holomorphe Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$, so gilt:

   Es ist $\omega(z_0; f+g) \geq \min(\omega(z_0; f), \omega(z_0; g))$, wobei $\omega(z_0; f+g) = \min(\omega(z_0; f), \omega(z_0; g))$, wenn $\omega(z_0; f)$ und $\omega(z_0; g)$ verschieden sind.

   Es ist $\omega(z_0; fg) = \omega(z_0; f) + \omega(z_0; g)$, falls beide Zahlen $\omega(z_0; f)$ und $\omega(z_0; g)$ endlich sind.

2. Ist f auf $\dot{U}$ holomorph und ist die Ordnung m von z_0 bezüglich f endlich, so existiert ein r' mit $0 < r' < r$, so dass $1/f$ auf der durch $0 < |z - z_0| < r'$ gegebenen, offenen punktierten Kreisscheibe holomorph ist, mit

$$\omega(z_0; 1/f) = -\omega(z_0; f).$$

Beispiel 1.4.14. 1) Sei $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \sin \frac{1}{z}$, dann ist für $z \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z^{-1})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{-2n-1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{z^{-1}}{1} - \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-5}}{5!} \mp \ldots \end{aligned}$$

Das ist die Laurententwicklung von f um 0. Hier sind unendlich viele der a_{-n} ungleich 0 (die mit ungeradem n). Also ist 0 eine wesentliche Singularität von f.
2) Sei $f\colon B_\pi(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $\quad f(z) := \frac{z}{\sin z}$, dann existiert

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} f(z) = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{z}{\sin z} = 1.$$

Damit ist 0 also eine hebbare Singularität von f, denn $g\colon B_\pi(0) \to \mathbb{C}$,

$$g(z) := \begin{cases} 1 & \text{für } z = 0, \\ \dfrac{z}{\sin z} & \text{für } z \neq 0, \end{cases}$$

ist in $B_\pi(0)$ holomorph (mit $g'(0) = 0$) und setzt f fort.

3) Sei $f\colon B_\pi(0)\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $\quad f(z) := \dfrac{1}{\sin z}$. Dann ist $f(z) = \dfrac{1}{z}\cdot g(z)$ mit der in (2) definierten, auf $B_\pi(0)$ holomorphen, Funktion g , also gibt es $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ für } |z| < \pi \text{ und damit}$$

$$f(z) = \frac{a_0}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} \text{ mit } a_0 = g(0) = 1 \neq 0,$$

also ist 0 ein Pol der Ordnung 1 von f.

Definition 1.4.15 *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Es gebe eine Menge $S \subseteq U$ von isolierten Punkten, so dass*
(i) $f\colon U \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph ist, und
(ii) die Elemente von S sämtlich Pole oder hebbare Singularitäten von f sind.
Dann heißt f eine meromorphe Funktion *auf U.*

Beispiel 1.4.16.

1. Sei R eine komplexe rationale Funktion, also

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

mit Polynomfunktionen $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, wobei Q (ohne Einschränkung) normiert sei. Dann ist nach dem Fundamentalsatz der Algebra die Menge $S := \{z \in \mathbb{C} |\ Q(z) = 0\}$ endlich, und $R\colon \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph, und wir können $Q(z)$ in Linearfaktoren zerlegen,

$$Q(z) = \prod_{q \in S} (z-q)^{s_q} \text{ mit } s_q \in \mathbb{N}.$$

Für alle $p \in S$ können wir in einer passenden Umgebung

$$R(z) = \frac{1}{(z-p)^{s_p}} \cdot f(z)$$

mit einer in p holomorphen Funktion f schreiben, d.h. dass R in p also einen Pol der Vielfachheit höchstens s_p hat, wenn s_p die Vielfachheit der Nullstelle p von $Q(z)$ ist.

2. Für die Tangensfunktion $\tan\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ findet man: tan ist meromorph, alle Pole sind einfache Pole.

Wir wollen noch die Situation an wesentlichen Singularitäten beschreiben:

Theorem 1.4.17 (Satz von Picard)**.**
Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität der analytischen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$. Dann sind nur zwei Fälle möglich: Für jede punktierte Umgebung $\dot{U}$ von z_0 gilt $f(\dot{U}) = \mathbb{C}$, oder es gilt $f(\dot{U}) = \mathbb{C} \setminus \{c\}$ für genau ein $c \in \mathbb{C}$.

Mit anderen Worten: eine analytische Funktion nimmt in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität z_0 jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme an. Eine komplexwertige Funktion f ist also "extrem nervös" in der Nähe einer wesentlichen Singularität. Als Beispiel betrachte man die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ um den Punkt $z_0 = 0$.

Die für den Beweis dieser Aussage nötigen Methoden können wir allerdings in dieser Vorlesung nicht bereit stellen. Wir verweisen auf Kapitel 10.4 von Reinhold Remmert und Georg Schumacher: Funktionentheorie 2, dritte Auflage, Springer 2007.

1.5 Der Residuensatz

Wir hatten schon im Korollar 1.4.3 gesehen, dass für jeden geschlossenen Weg φ das Integral $\int_\varphi z^k \mathrm{d}z$ für $k \neq -1$ verschwindet, weil die monomiale Funktion $z \mapsto z^k$ dann eine Stammfunktion hat. Dies legt eine besondere Rolle des Koeffizienten a_{-1} in einer Laurententwicklung nahe.

Definition 1.5.1
Sei eine Funktion f mit Werten in $\mathbb{C}$ (oder einem Banachraum E), auf der offenen Menge $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ analytisch, und z_0 eine Singularität von f. Der Koeffizient a_{-1} im Hauptteil der Laurententwicklung von f um z_0 wird das Residuum *von f im Punkt z_0 genannt. Wir schreiben*

$$a_{-1} =: \mathrm{Res}_{z=z_0} f.$$

Bemerkungen 1.5.2.

1. Nach der Koeffizientenformel aus Satz 1.4.6 für Laurentreihen ist das Residuum gleich dem Mittelungsintegral
$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} f(z) \mathrm{d}z$$
für ρ klein genug.

2. Ist die Singularität von f in z_0 hebbar, so ist nach dem Cauchyschen Integralsatz 1.3.2 das Residuum $\mathrm{Res}_{z=z_0} f = 0$.

3. Eine analytische Funktion $f(z)$ habe einen Pol der Ordnung m an der Stelle z_0, so dass wir als Laurentreihe finden
$$f(z) \; = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z - z_0)^{-m+1} + \ldots .$$
Dann hat die Funktion
$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \ldots$$
eine hebbare Singularität in z_0. Wir setzen sie holomorph fort. Dann gilt die für praktische Rechnungen wichtige Formel
$$(*) \qquad \mathrm{Res}_{z=z_0} f \stackrel{\text{def}}{=} a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\Big|_{z=z_0} \left((z - z_0)^m f(z)\right).$$

Beispiel 1.5.3.

1. Betrachte für $z \neq 0$ die Funktion $f(z) = \frac{\cos z}{z}$. Aus der Reihenentwicklung der cosinus-Funktion
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} \pm \ldots$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt $\mathrm{Res}_{z=0} f = 1$.

2. Betrachte für $z \neq 0$ die Funktion $f(z) = e^{1/z}$. Wegen der Reihenentwicklung
$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$
für $z \neq 0$ folgt $\mathrm{Res}_{z=0} e^{1/z} = 1$.

3. Betrachte für $z \neq 0$ die Funktion $f(z) = e^{1/z^2}$. Aus der gleichen Reihenentwicklung für $z \neq 0$ folgt $\operatorname{Res}_{z=0} e^{1/z^2} = 0$.

4. Sei U offen in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in U$. Die Funktionen $g, h \colon U \to \mathbb{C}$ seien holomorph. Ferner gelte $g(z_0) \neq 0$ und h habe in z_0 eine einfache Nullstelle, d.h. es gibt eine Potenzreihenentwicklung $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ mit $h'(z_0) = b_1 \neq 0$.

   Dann existiert
   $$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{b_1} \neq 0.$$
   und
   $$\operatorname{Res}_{z=z_0} \left(\frac{g}{h} \right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

5. Die Funktion $f(z) := \dfrac{z+2}{(z-3)^3(z+3)}$ hat in $z_0 = 3$ einen dreifachen Pol. Sei
   $$g(z) := (z-3)^3 f(z) = \frac{z+2}{z+3} = 1 - \frac{1}{z+3},$$
   so ist $g''(z) = \dfrac{-2}{(z+3)^3}$, also wegen $(*)$
   $$\operatorname{Res}_{z=3} f = \frac{1}{2!} \frac{-2}{(3+3)^3} = -\frac{1}{216}.$$

6. Sei U offen in $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, und $0 \neq f$ meromorph auf U. Dann gilt für die *logarithmische Ableitung*
   $$F \colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}, \quad F(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}:$$
   $$\operatorname{Res}_{z=z_0}(F) = \omega(z_0; f).$$
   Denn: Es existiert ein $m \in \mathbb{Z}$,
   $$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$
   wobei $g(z_0) \neq 0$ und g holomorph in einer Umgebung von z_0. Es ist
   $$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z),$$
   $$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$
   wobei $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ wegen $g(z_0) \neq 0$ in einer Umgebung von z_0 holomorph ist. Also ist
   $$\operatorname{Res}_{z=z_0}(F) = m.$$

Wir können nun einen weiteren zentralen Satz der Funktionentheorie formulieren:

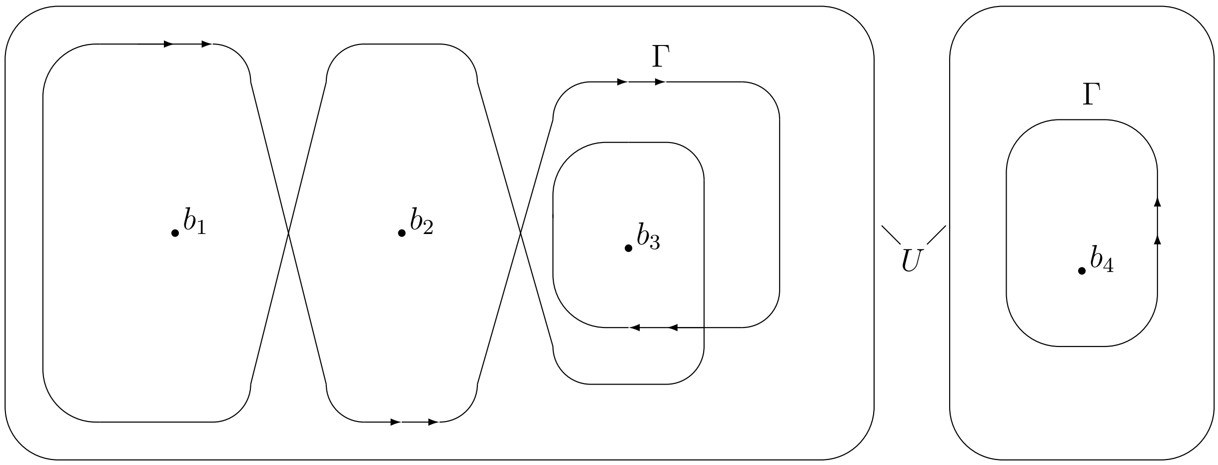
Theorem 1.5.4 (Residuensatz)**.** Sei U offen in $\mathbb{C}$, (b_n) eine endliche oder unendliche Folge verschiedener Punkte von U und S die Menge der Punkte dieser Folge. Alle Punkte von S seien in U isolierte Punkte. Es sei

$$f\colon U \setminus S \to \mathbb{C} \text{ holomorph,}$$

Γ sei ein Zyklus in $U \setminus S$, Γ nullhomolog in U. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_n j(b_n;\Gamma)\operatorname{Res}_{z=b_n} f.$$

Dabei gibt es auf der rechten Seite nur endliche viele von Null verschiedene Glieder.



Beweis.

1. Wir können die holomorphe Funktion f auf alle hebbaren singulären Punkte in S analytisch ausdehnen. Wegen $\operatorname{Res}_{z=b_n} f = 0$ für hebbare singuläre oder nicht-singuläre Punkte tragen solche b_n zur Summe auf der rechten Seite nicht bei. Daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass jedes $b_n \in S$ ein nicht hebbarer singulärer Punkt für f ist.

2. Es ist der Abschluss
$$\overline{\{z \in U | j(z;\Gamma) \neq 0\}}$$
der Menge der Punkte, die in Bezug auf Γ nicht-verschwindenen Index haben, in $\mathbb{C}$ kompakt und in der offenen Menge U enthalten, vgl. Bem. 1.3.6. Das heißt, $\{z \in U | j(z;\Gamma) \neq 0\}$ ist eine relativ kompakte Teilmenge von U. Eine relativ kompakte Teilmenge von U ohne Häufungspunkte enthält aber nur endlich viele Punkte. Daher sei ab jetzt $S = \{b_1, \ldots, b_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

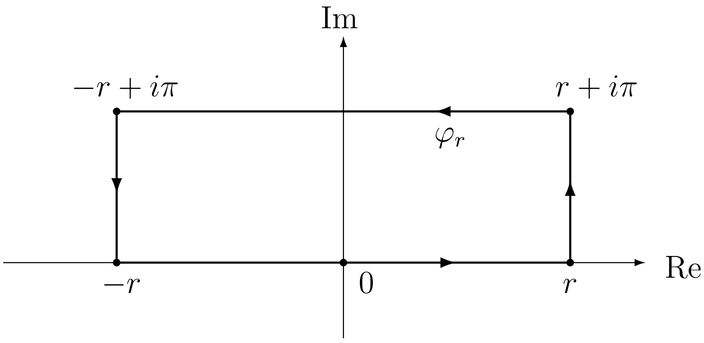
3. Sei
$$\Gamma = \sum_{j=1}^m k_j \gamma_j$$
mit $k_j \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ und geschlossenen Wegen γ_j in $U \setminus S$. Um jedes b_l nehmen wir einen kleinen Kreis mit Radius r_l, so dass
$$B_{r_l}(b_l) \setminus \{b_l\} \subseteq U \setminus S$$
ist, und dazu einen Weg φ_l, der den Rand dieses Kreises genau $j(b_l;\Gamma)$-mal durchläuft.

4. Sei
$$\Phi := \sum_{l=1}^{n} \varphi_l,$$
Dann ist auch $\Phi \sim_U 0$, und es gilt
$$\Phi \sim_{U \setminus S} \Gamma.$$
Nach dem Cauchyschen Integralsatz, genauer der Folgerung 1.3.3, gilt
$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z \overset{1.3.3}{=} \int_\Phi f(z)\mathrm{d}z &= \sum_{l=1}^{n} \int_{\varphi_l} f(z)\mathrm{d}z \\ &= 2\pi i \sum_{l=1}^{n} j(b_l;\Gamma)\,\mathrm{Res}_{z=b_l} f,\end{aligned}$$
wobei wir im letzten Schritt die Entwicklung in eine gleichmäßig konvergente Laurent-Reihe, siehe Satz 1.4.6, und die Definition des Residuums benutzt haben.

□

Der Residuensatz erlaubt es, explizit bestimmte Integrale auszurechnen, die zum Teil im Rahmen der reellen Analysis nicht elementar zugänglich sind. Wir bringen ein erstes Beispiel und diskutieren einige Beispielklassen.

Beispiel 1.5.5. Zu berechnen ist das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$. Dazu integrieren wir die Funktion $\frac{1}{\cosh z}$ über den Rand φ_r des folgenden Rechtecks



und finden für das Integral über den Rand φ_r
$$\int_{\varphi_r} \frac{\mathrm{d}z}{\cosh z} = \int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} - \int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh(t+i\pi)} + \int_0^\pi \frac{i\mathrm{d}t}{\cosh(r+it)} - \int_0^\pi \frac{i\mathrm{d}t}{\cosh(-r+it)}.$$
Nun gilt
$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi \frac{i\mathrm{d}t}{\cosh(r+it)}\right| &\le \pi \cdot \sup_{t\in[0,\pi]} \frac{1}{|\cosh r \cos t + i \sinh r \sin t|} \\ &= \pi \cdot \sup_{t\in[0,\pi]} \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 r \cos^2 t + \sinh^2 r \sin^2 t}} = \frac{\pi}{\sinh r},\end{aligned}$$
da das Minimum der Funktion $t \mapsto \cosh^2 r \cos^2 t + \sinh^2 r \sin^2 t$ im Intervall $[0,\pi]$ bei $t = \pi/2$ angenommen wird.

Wegen $\lim_{r\to\infty} \sinh r = \infty$ ergibt sich der Grenzwert des Randintegrals zu
$$\lim_{r\to\infty} \int_{\varphi_r} \frac{\mathrm{d}z}{\cosh z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh(t+i\pi)};$$

wegen $\cosh(t+i\pi) = -\cosh t$ folgt aus dem Residuensatz

$$2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} = 2\pi i \sum_{0\,<\,\mathrm{Im}\,a\,<\,\pi} \mathrm{Res}_{z=a}\left(\frac{1}{\cosh z}\right),$$

denn auf der reellen Achse hat die Funktion $\frac{1}{\cosh z}$ keine Singularitäten. Für $0 < \mathrm{Im}\, a < \pi$ ist $\cosh a = 0$ nur für $a = i\frac{\pi}{2}$. Es ist $i\frac{\pi}{2}$ ein einfacher Pol wegen $\cosh'(i\frac{\pi}{2}) = \sinh(i\frac{\pi}{2}) = i\sin\frac{\pi}{2} = i \neq 0$. Nach Formel (1.5.3)(4.) ist daher das Residuum

$$\mathrm{Res}_{z=i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cosh z}\right) = \frac{1}{\cosh'\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = -i,$$

und somit schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} = i\pi\, \mathrm{Res}_{z=i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cosh z} = \pi.$$

Korollar 1.5.6 (Typ 1).
Seien $p(x,y)$ und $q(x,y)$ Polynome mit reellen bzw. komplexen Koeffizienten in zwei Unbestimmten. Sei $q(x,y) \neq 0$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$ mit $x^2+y^2=1$. Setze

$$R(x,y) := \frac{p(x,y)}{q(x,y)}.$$

Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{a\in B_1(0)} \mathrm{Res}_{z=a} f,$$

wobei f die rationale Funktion

$$f(z) := \frac{1}{z} R\big(\tfrac{1}{2}(z+\tfrac{1}{z}), \tfrac{1}{2i}(z-\tfrac{1}{z})\big)$$

ist. Man beachte, dass in der Summe wieder tatsächlich nur endlich viele Terme beitragen.

Beweis.

- Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist $\overline{z} = \frac{1}{z}$ und daher

  $$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) = \mathrm{Re} z, \qquad \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}) = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}) = \mathrm{Im} z$$

  reell. Wegen $(\mathrm{Re} z)^2 + (\mathrm{Im} z)^2 = 1$ ist $q(\mathrm{Re} z, \mathrm{Im} z) \neq 0$ für alle z auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene, also hat die rationale Funktion f auf dem Einheitskreis keine Pole.

- Nach dem Residuensatz ist daher

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{a\in B_1(0)} \mathrm{Res}_{z=a} f &= \frac{1}{i}\int_{\partial B_1(0)} f(z)\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{i}\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z} R\big(\tfrac{1}{2}(z+\tfrac{1}{z}), \tfrac{1}{2i}(z-\tfrac{1}{z})\big)\mathrm{d}z \qquad \text{[Defn. von } f\text{]} \\ &= \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} R\big(\tfrac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}), \tfrac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})\big)e^{-it} i e^{it}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 1.5.7 (zu Typ 1)**.**
Wir berechnen

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\cos t}$$

für $a \in \mathbb{R}$ und $a > 1$. Es ist $R(x,y) = \frac{1}{a+x}$, also

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} = \frac{2}{z^2+2az+1}.$$

Es gilt $z^2 + 2az + 1 = (z-\alpha)(z-\beta)$ mit Nullstellen

$$\alpha = -a + \sqrt{a^2-1}, \quad \beta = -a - \sqrt{a^2-1}.$$

Wegen der Voraussetzung $a > 1$ sind beide Wurzeln reell. Man rechnet leicht nach, dass aus $a > 1$ folgt $|\alpha| < 1$. Wegen $\alpha \cdot \beta = 1$ folgt $|\beta| > 1$. Wir finden somit nach Korollar 1.5.6

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\cos t} &= 2\pi \operatorname{Res}_{z=\alpha} \frac{2}{z^2+2za+1} = 4\pi \operatorname{Res}_{z=\alpha} \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} \\ &= 4\pi \frac{1}{\alpha-\beta} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}.\end{aligned}$$

Wir kommen nun zu einer zweiten Klasse von Integralen, die man mit Hilfe des Residuensatzes ausrechnen kann.

Korollar 1.5.8 (Typ 2a)**.**
Seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei polynomiale Funktionen mit reellen Koeffizienten mit $q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Betrachte die rationale Funktion

$$R(x) := \frac{p(x)}{q(x)},$$

die keine Pole auf der reellen Achse hat. Es gelte

$$\deg q \geq 2 + \deg p.$$

Dann gilt:

1. Die uneigentlichen Integrale der Funktionen $|R(x)|$ und $R(x)$ über $\mathbb{R}$ existieren.

2. Das Integral ergibt sich zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z=a_j} R(z),$$

   wobei $a_1, a_2, \dots a_k$ die Polstellen der Funktion $R(z)$ in der komplexen oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}$ sind.

Mit Hilfe der analytischen Fortsetzung der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion auf die obere Halbebene lassen sich so reelle Integrale berechnen.

Beweis.

- Wegen der Annahme über das Nennerpolynom q ist die rationale Funktion R stetig auf $\mathbb{R}$. Sei

$$p(z) = \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu z^\nu \text{ und } q(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu$$

mit $n - m \geq 2$ und $c_n \neq 0$. Für $z \neq 0$ finde

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = z^{m-n} \frac{\frac{b_0}{z^m} + \ldots + b_m}{\frac{c_0}{z^n} + \ldots + c_n}.$$

Für $|z| \to \infty$ strebt der zweite Faktor gegen b_m/c_n, ist also insbesondere beschränkt. Also existiert $M > 0$ und $c > 0$, so dass

$$|R(z)| \leq |z^{m-n}| \cdot M \text{ für alle } |z| > c$$

gilt. Wegen $n - m \geq 2$ folgt

$$|R(z)| \leq \frac{1}{|z|^2} \cdot M \text{ für alle } |z| > c. \tag{6}$$

Insbesondere gilt für $z = x$ reell und für $0 < c < A$

$$\begin{aligned}
\int_0^A |R(x)|\mathrm{d}x &= \int_0^c |R(x)|\mathrm{d}x + \int_c^A |R(x)|\mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^c |R(x)|\mathrm{d}x + M \cdot \int_c^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \qquad \text{[wegen (6)]} \\
&= \int_0^c |R(x)|\mathrm{d}x + M(-\frac{1}{A} + \frac{1}{c}) \\
&\leq \int_0^c |R(x)|\mathrm{d}x + \frac{M}{c} < \infty.
\end{aligned}$$

Das Integral $\int_0^A |R(x)|\mathrm{d}x$ mit nicht-negativem Integranden ist offenbar monoton wachsend als Funktion von A und gleichmäßig in A beschränkt. Es folgt, dass der Grenzwert

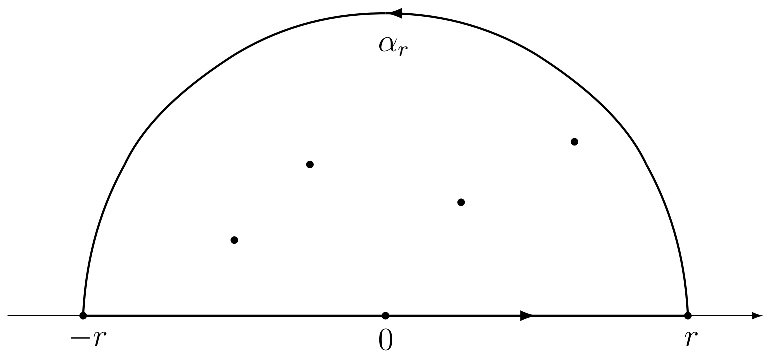
$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A |R(x)|\mathrm{d}x$$

existiert und einen endlichen Wert hat. Gleichermaßen schließt man für

$$\lim_{B\to\infty} \int_{-B}^0 |R(x)|\mathrm{d}x.$$

- Wir betrachten für jedes $r > 0$ den geschlossenen Weg γ_r mit

$$\gamma_r(t) := \begin{cases} t & \text{für } -r \leq t \leq r \\ re^{it} & \text{für } 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$



Die Kurve ist also die Aneinanderhängung des Intervalls $[-r, r]$ auf der reellen Achse mit einem Halbkreis α_r in der oberen Halbebene vom Radius r. Da q ein Polynom ist, hat R höchstens endlich viele Polstellen in der oberen Halbebene. Wir wählen der Radius r des Halbkreises α_r so groß, dass der Halbkreis alle Polstellen der rationalen Funktion R in der oberen Halbebene umfasst. Dann gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{\alpha_r} R(z)\mathrm{d}z + \int_{-r}^{r} R(x)\mathrm{d}x = \int_{\gamma_r} R(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{z=a_j} R(z).$$

Wir schätzen das erste Integral über den Halbkreis α_r ab:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\alpha_r} R(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi} R(re^{it}) rie^{it}\mathrm{d}t\right| &\leq r\int_0^{\pi} |R(re^{it})|\mathrm{d}t \\ &\leq r\frac{M}{r^2}\pi = \frac{M\pi}{r},\end{aligned}$$

wobei wir wieder die Abschätzung (6) benutzt haben. Dieser Beitrag geht für $r \to \infty$ gegen Null. Da außerdem gilt

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} R(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{d}x,$$

folgt die Behauptung.

□

Beispiel 1.5.9 (zu Typ 2a)**.**
Wir zeigen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim_{r\to\infty} \arctan x\Big|_{-r}^{r} = \pi.$$

Es gilt $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$, also hat die Funktion $\frac{1}{z^2+1}$ genau eine Polstelle in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$, nämlich $+i$. Es gilt

$$\mathrm{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \lim_{z\to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

Mit dem vorangegangenen Satz 1.5.8 folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

Man kann mit dem Residuensatz auch Fourierintegrale berechnen:

Korollar 1.5.10 (Typ 2b).
Sei f eine Funktion, die in allen $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im} z \geq 0$ komplex differenzierbar ist, mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten z_0, für die $\mathrm{Im} z_0 \neq 0$ ist, und es gelte $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)>0}} |f(z)| = 0$.

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_0 > 0} \mathrm{Res}_{z=z_0} \left(f(z) e^{iz} \right).$$

Beweis.
Man integriert die Funktion $f(z) \cdot e^{iz}$ über denselben Weg wie in Korollar 1.5.8 und erhält

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_0 > 0} \mathrm{Res}_{z=z_0} (f(z) e^{iz}) - \lim_{r\to\infty} \int_{\alpha_r} f(z) e^{iz} \mathrm{d}z,$$

mit dem Halbkreis $\alpha_r \colon [0, \pi] \to \mathbb{C}$ mit $\alpha_r(t) := re^{it}$, falls der Limes existiert. Mit der Schranke $M_r := \sup\{|f(z)|, |z| = r, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\alpha_r} f(z) e^{iz} \mathrm{d}z \right| = \left| \int_0^{\pi} f(re^{it}) e^{ire^{it}} \cdot ire^{it} \mathrm{d}t \right| &\leq \int_0^{\pi} r |f(re^{it})| \cdot |e^{-r \sin t}| \mathrm{d}t \\
&\leq r M_r \int_0^{\pi} e^{-r \sin t} \mathrm{d}t = 2 r M_r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin t} \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

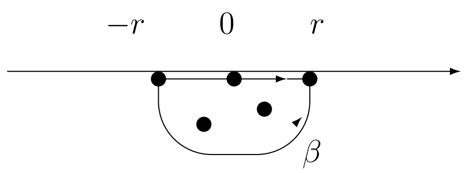
Im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ ist $\sin t \geq \dfrac{2}{\pi} t$ und daher

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin t} \mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} r t} \mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2r} e^{-\frac{2r}{\pi} t} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2r} (1 - e^{-r}) \leq \frac{\pi}{2r},$$

$$\text{also} \quad \left| \int_{\alpha_r} f(z) e^{iz} \mathrm{d}z \right| \leq \pi \cdot M_r \to 0 \quad \text{für } r \to \infty.$$

$\square$

Bemerkungen 1.5.11 (Typ 2b').
Sei f eine Funktion auf der unteren Halbebene, $\mathrm{Im} z_0 \leq 0$, die mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten z_0, für die $\mathrm{Im}\, z_0 \neq 0$ ist, holomorph ist. Indem man statt den Weg aus Korollar 1.5.8 einen Weg der Form



betrachtet, um $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix}\mathrm{d}x$ zu berechnen, erhält man die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix}\mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_0 < 0} \mathrm{Res}_{z=z_0}(f(z)e^{-iz}),$$

Zu summieren ist hier über alle Singularitäten in der unteren Halbebene, und man muss voraussetzen, dass

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)\leq 0}} |f(z)| = 0.$$

Beispiel 1.5.12 (zu Typ 2b)**.**
Es ist

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\mathrm{d}x \overset{1.5.10}{=} \mathrm{Re}\left(i\pi \sum_{\mathrm{Im} z_0 > 0} \mathrm{Res}_{z=z_0}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right)\right),$$

wobei über alle Pole in der oberen Halbebene summiert wird. Die Voraussetzung von Korollar 1.5.10 ist erfüllt: für $z = re^{it}$ und $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ gilt

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}} |f(z)| = \lim_{\substack{r\to\infty \\ t\in[0,\pi]}} \left|\frac{1}{1+r^2e^{2it}}\right| = 0,$$

weil $|\frac{1}{1+r^2e^{2it}}| \leq \frac{1}{r^2-1}$ gilt. Nun hat die Funktion $\frac{e^{iz}}{1+z^2}$ nur bei $z_0 = i$ einen einfachen Pol mit $\mathrm{Im} z_0 > 0$. Für das Residuum gilt nach Beispiel (1.5.3)(4.):

$$\mathrm{Res}_{z=i}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right) = \frac{e^{iz_0}}{2z_0} = \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{1}{2ie},$$

also gilt

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2e}.$$

Korollar 1.5.13 (Typ 3a)**.**
Sei $0 < \alpha < 1$ und R eine reelle rationale Funktion, die auf der positiven Halbachse $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definiert ist und für die $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$ gilt. Wir setzen für $z = |z|e^{i\theta}$ mit $\theta \in (0, 2\pi)$ auf der geschlitzten komplexen Ebene

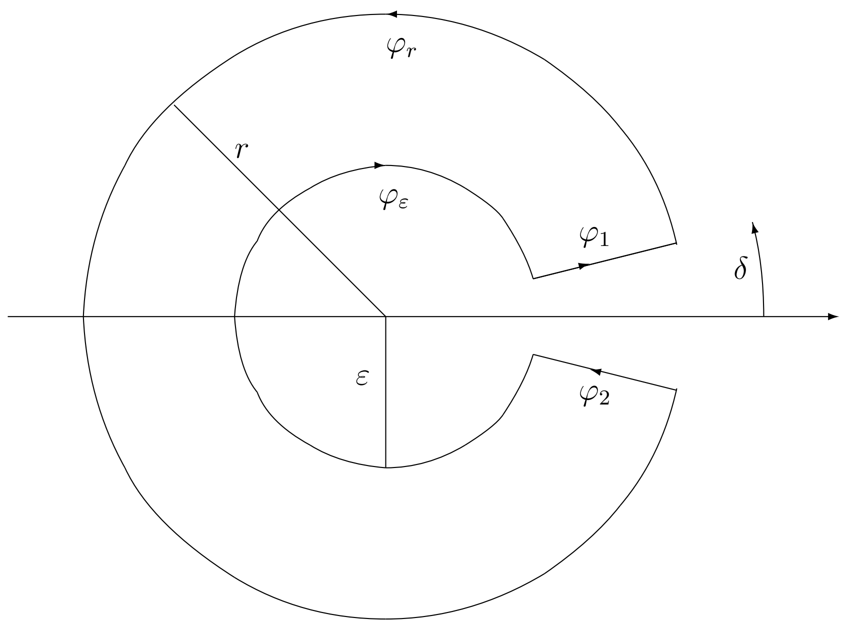
$$(*) \quad z^\alpha := |z|^\alpha e^{i\alpha\theta}.$$

Dann gilt:

$$\int_0^\infty \frac{R(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i\alpha}} \cdot \sum_{z_0\neq 0} \mathrm{Res}_{z=z_0}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}\right).$$

Beweis.
Nach den Voraussetzungen an die *rationale* Funktion R gibt es eine Konstante c mit $|R(x)| \leq \frac{c}{x}$ für alle $x \geq 1$. Wegen $\left|R(x)x^{-\alpha}\right| \leq cx^{-\alpha-1}$ folgt, dass das Integral $\int_1^\infty R(x)x^{-\alpha}\mathrm{d}x$ für $0 < \alpha$ konvergiert. Ferner ist die Funktion $R(x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ stetig und somit beschränkt. Also konvergiert das Integral $\int_0^1 R(x)x^{-\alpha}\mathrm{d}x$ für $\alpha < 1$. Insgesamt konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty R(x)x^{-\alpha}\mathrm{d}x$ für alle $0 < \alpha < 1$.

Wir betrachten nun den folgenden geschlossenen Weg in $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$, der aus vier Wegen $\varphi_1, \varphi_r, \varphi_2, \varphi_\varepsilon$ zusammengesetzt ist:



Wir integrieren nun $R(z)z^{-\alpha}$, wobei z^α die in $(*)$ definierte Funktion ist. Bei der Wahl von θ in $(*)$ haben wir die Funktion z^α so definiert, dass sie in der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$ holomorph ist. Wir wählen r so groß und ε und δ so klein, dass für alle Pole $z_0 \neq 0$ von $\frac{R(z)}{z^\alpha}$ der Index von φ gleich 1 ist, $j(z_0; \varphi) = 1$. Dann gilt

$$2\pi i \sum_{z_0 \neq 0} \mathrm{Res}_{z=z_0} \frac{R(z)}{z^\alpha} = \int_\varphi \frac{R(z)}{z^\alpha} \mathrm{d}z = \left(\int_{\varphi_r} + \int_{\varphi_\varepsilon} + \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} \right) \frac{R(z)}{z^\alpha} \mathrm{d}z.$$

Aus $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$ und $0 < \alpha < 1$ folgt nun, dass die Integrale über die Kreissegmente φ_r und φ_ε für $r \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ gegen 0 gehen. Man erhält

$$\begin{aligned} \int_\varphi \frac{R(z)}{z^\alpha} \mathrm{d}z &= \lim_{r\to\infty, \varepsilon\to 0} \left(\int_\varepsilon^r \frac{R(te^{i\delta})}{(te^{i\delta})^\alpha} e^{i\delta} \mathrm{d}t - \int_\varepsilon^r \frac{R(te^{i(2\pi-\delta)})}{(te^{i(2\pi-\delta)})^\alpha} e^{i(2\pi-\delta)} \mathrm{d}t \right) \\ &= e^{-i\alpha\delta} \int_0^\infty \frac{R(te^{i\delta})}{t^\alpha} e^{i\delta} \mathrm{d}t - e^{i\alpha\delta - 2\pi i\alpha} \int_0^\infty \frac{R(te^{i(2\pi-\delta)})}{t^\alpha} e^{i(2\pi-\delta)} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Wir bilden nun den Limes für $\delta \to 0$:

$$2\pi i \sum_{z_0 \neq 0} \mathrm{Res}_{z=z_0} \left(\frac{R(z)}{z^\alpha} \right) = \left(1 - e^{-2\pi i\alpha}\right) \int_0^\infty \frac{R(t)}{t^\alpha} \mathrm{d}t.$$

□

Beispiel 1.5.14 (zu Typ 3a)**.** Wir wollen das Integral

$$I := \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} \quad \text{für } \alpha \in (0,1)$$

berechnen. Die Funktion $R(z)z^{-\alpha} := \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$ hat nur bei $z_0 = -1$ einen von Null verschiedenen Pol erster Ordnung. Es ist für z^α wie in Korollar 1.5.13 definiert:

$$\mathrm{Res}_{z=-1} \frac{R(z)}{z^\alpha} = \lim_{z\to -1} (z+1) \frac{R(z)}{z^\alpha} = \lim_{z\to -1} \frac{1}{z^\alpha} = \frac{1}{(-1)^\alpha} = \frac{1}{(1 \cdot e^{i\pi})^\alpha} = \frac{1}{e^{i\alpha\pi}}.$$

Daher ist das Integral I

$$I = \frac{1}{e^{i\alpha\pi}} \cdot \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

Korollar 1.5.15 (Typ 3b)**.**
Sei R eine reelle rationale Funktion, die auf der positiven Halbachse $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ keine Pole hat und für die gilt

$$\lim_{x\to\infty} xR(x) = 0.$$

Wir betrachten einen Zweig $l(z)$ des Logarithmus, der auf der geschlitzten komplexen Ebene $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$ holomorph ist:

$$(**) l\colon \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}, \quad l(re^{i\theta}) := \ln r + i\theta, \text{ mit } \theta \in (0, 2\pi).$$

Dann gilt

$$\int_0^\infty R(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\left(\sum_{z_0\neq 0} \mathrm{Res}_{z=z_0}(R(z)l(z)^2)\right)$$

$$\int_0^\infty R(x)\ln x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\sum_{z_0\neq 0} \mathrm{Res}_{z=z_0}(R(z)l(z)^2)\right).$$

Beweis.
Wir nehmen denselben Integrationsweg φ wie in Korollar 1.5.13 und integrieren die Funktion $R(z)l(z)^2$ über φ. Wiederum lässt sich zeigen, dass die Wegintegrale über die Strecken φ_r und φ_ε für $r \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ gegen 0 gehen. Damit folgt für $\delta \to 0$:

$$2\pi i \sum_{z_0\neq 0} \mathrm{Res}_{z=z_0} R(z)l(z)^2 = \int_0^\infty R(te^{i\delta})(\ln t+i\delta)^2 e^{i\delta}\mathrm{d}t - \int_0^\infty R(te^{i(2\pi-\delta)})(\ln t+i(2\pi-\delta))^2 e^{i(2\pi-\delta)}\mathrm{d}t,$$

und für $\delta \to 0$:

$$\ldots = \int_0^\infty R(t)(\ln t)^2\mathrm{d}t - \int_0^\infty R(t)(\ln t + 2\pi i)^2\mathrm{d}t = -4\pi i \int_0^\infty R(t)\ln t\mathrm{d}t + 4\pi^2 \int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t,$$

also

$$-2\int_0^\infty R(t)\ln t\mathrm{d}t - 2\pi i \int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t = \sum_{z_0\neq 0} \mathrm{Res}_{z=z_0} R(z)l(z)^2.$$

Da die Funktion R nach Voraussetzung auf $\mathbb{R}$ nur reelle Werte annimmt, können wir auf beiden Seiten dieser Gleichung Imaginär- und Realteil bilden und erhalten die angegebenen Formeln. □

Beispiel 1.5.16 (zu Typ 3b)**.** Wir wollen das Integral

$$I := \int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$$

berechnen. Für die Funktion $R(x) := \frac{1}{(1+x)^3}$ gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(1+x)^3} = 0$. Ferner hat die Funktion $R(z) = \frac{1}{(1+z)^3}$ an der Stelle $z_0 = -1$ einen dreifachen Pol. Nach Bem. 1.5.2.3 ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=-1}(R(z)l(z)^2) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to-1} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(z+1)^3 R(z)l(z)^2 \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to-1} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} l(z)^2 = \frac{1}{2}\lim_{z\to-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(2l(z)\cdot\frac{1}{z}\right) \\ &= \lim_{z\to-1}\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z} - l(z)\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{(-1)^2} - \frac{l(-1)}{(-1)^2} = 1 - i\pi.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir aus Korollar 1.5.15, dass

$$I = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}(1 - i\pi) = -\frac{1}{2}$$

und nebenbei noch

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^3} = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}(1 - i\pi) = -\frac{1}{2\pi}(-\pi) = \frac{1}{2}.$$

Bemerkungen 1.5.17.

1. Wir können nun auch eine andere Form "generalisierter Funktionen" einführen, die Distributionen einschließen. Eine *Hyperfunktion* auf $\mathbb{R}$ ist ein Paar (f, g), wobei f eine holomorphe Funktion auf der oberen und g eine holomorphe Funktion auf der unteren komplexen Halbebene ist. Für jede auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ identifizieren wir die Hyperfunktionen (f, g) und $(f-h, g-h)$. Jede auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion h können wir als Hyperfunktion $(0, h)$ ansehen. Informell stellen wir uns eine Hyperfunktion als das vor, was die Differenz $g - f$ auf der reellen Achse $\mathbb{R}$ wäre.

2. Hyperfunktionen bilden einen Vektorraum; sie können komponentenweise differenziert werden.

3. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *holomorpher Punkt* der Hyperfunktion $f = (f_+, f_-)$, wenn die Einschränkung f auf eine Umgebung von a äquivalent zu einer holomorphen Funktion ist. Sind a, b holomorphe Punkte von f, so wählen wir Kurven $\gamma_\pm\colon [0,1] \to \mathbb{C}_\pm$ mit Anfangspunkt a und Endpunkt b, die in der oberen bzw. unteren Halbebene verlaufen. Wir setzen dann
$$\int_a^b f := -\int_{\gamma_+} f_+ \mathrm{d}z + \int_{\gamma_-} f_- \mathrm{d}z.$$
Da die obere und untere Halbebene einfach zusammenhängend sind, ist dieser Ausdruck wegen des Cauchyschen Integralsatzes bzw. Korollar 1.3.5 von der Wahl der Wege $\gamma_\pm$ unabhängig.

4. Ist φ eine (komplex-)analytische Funktion auf (einer Umgebung von) $\mathbb{R}$ und f eine Hyperfunktion *mit kompaktem Träger* (die außerhalb eines kompakten Intervalls von $\mathbb{R}$ nur holomorphe Punkte hat), so haben wir eine bilineare Paarung
$$(f, \varphi) \mapsto \int f \cdot \varphi,$$
die den Dualraum $\mathcal{O}'(\mathbb{R})$ des Raumes $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ der analytischen Funktionen mit dem Raum der Hyperfunktionen mit kompaktem Träger sogar identifiziert.

5. Wir betrachten nun die von Null verschiedene Hyperfunktion $\delta := (\frac{1}{2\pi i z}, \frac{1}{2\pi i z})$. Wir finden für jede Funktion $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$:
$$\int \delta \cdot \varphi = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{1}{2\pi i z}\varphi(z)\mathrm{d}z = \varphi(0),$$
wobei wir im letzten Schritt die Cauchysche Integralformel 1.3.10 benutzt haben. Damit haben wir eine Hyperfunktion gefunden, die der Dirac-Distribution entspricht.

6. Sei nun g eine beliebige Distribution mit Träger in einem kompakten Intervall I. Dann definieren wir durch Faltung von g mit δ, also $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_I g(x)\frac{1}{z-x}\mathrm{d}x$, eine Hyperfunktion, die an der reellen Achse auf I "springt". Mit Hilfe einer Zerlegung der Eins kann man so jede Distribution in die Hyperfunktionen einbetten. Aber Funktionen mit wesentlichen Singularitäten wie $e^{1/z}$ liefern Hyperfunktionen, die keine Distributionen sind.

2 Funktionalanalysis

Die Zustände werden in der Quantenmechanik durch komplexwertige Wellenfunktionen Ψ beschrieben. In einfachen Beispielen ist Ψ eine Funktion $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$. Ein wichtiges Element für die physikalische Interpretation ist

$$P[I] := \int_I |\Psi(x)|^2 d^3x,$$

die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen, dessen Zustand durch die Wellenfunktion Ψ beschrieben ist, im Intervall I anzutreffen. Insbesondere muss dann $\int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(x)|^2 d^3x = 1$ gelten. Insbesondere muss $\Psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ gelten.

Die Quantenmechanik macht Vorhersagen zu Fragen wie

(i) Welche Messwerte der Energie können überhaupt in Messungen möglicherweise beobachtet werden (diskretes oder nicht diskretes Spektrum)?

(ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Teilchen ein Wert für die Energie gemessen wird, welcher im Intervall I liegt?

Zur Beantwortung dieser Fragen wird messbaren Grössen wie der Energie E ein *Operator* H zugeordnet, eine lineare Abbildung, welche Wellenfunktionen Ψ abbildet auf $\Psi' = H\Psi$, mit

$$(H\Psi)(x) = \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)\Big)\Psi(x).$$

Um Fragen wie (i) und (ii) zu beantworten, benötigt die Quantenmechanik eine mathematische Theorie, welche das Problem verallgemeinert, die Eigenwerte von Matrizen zu bestimmen. Da Operatoren wie H im Allgemeinen nicht durch endliche Matrizen dargestellt werden können, ist das schwieriger als in der endlich-dimensionalen linearen Algebra.

Im folgenden Teil der Vorlesung wollen wir einen ersten Eindruck davon vermitteln, welche Art von mathematischer Theorie benötigt wird, um derartige Fragen zu beantworten.

2.1 Hilberträume und Banachräume - Erinnerung

Wir erinnern in diesem Abschnitt an bekannte Tatsachen, Begriffe und Sätze. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Definition 2.1.1

1. *Ein* Banachraum *ist ein normierter Vektorraum V, der bezüglich der zur Norm gehörenden Metrik mit $d(x, y) = \|x - y\|$ für $x, y \in V$ vollständig ist, für den also jede Cauchy-Folge konvergiert.*

2. *Ein* Hilbertraum *ist ein Hermitescher Vektorraum V, der bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Metrik d vollständig ist.*

3. *Ein metrischer Raum (X, d) heißt* separabel, *falls es eine abzählbare dichte Teilmenge in X gibt.*

4. *Wir vereinbaren, dass ein Hilbertraum in der Folge stets ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum ist.*

Beispiel 2.1.2.

1. Der Vektorraum der quadratisch summierbaren komplexen Zahlenfolgen

$$\ell^2 := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, x_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

mit dem Hermiteschen Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{x_n} y_n$$

ist ein (unendlich-dimensionaler, separabler) Hilbertraum. Endliche Linearkombinationen der Einheitsvektoren e_k, dargestellt durch die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = 0$ für $n \neq k$, $x_k = 1$, spannen einen dichten Unterraum von ℓ^2 auf.

2. Eine Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ heißt eine L^2-Funktion wenn die Funktion $|f|^2$ integrierbar ist. Wir definieren den Funktionenraum

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid f \text{ ist } L^2\text{-Funktion}\}.$$

Dies ist ein komplexer Vektorraum mit der Halbnorm

$$f \mapsto \|f\|_2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 d^n x,$$

Weiterhin sei

$$L^2(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}, \qquad \mathcal{N} = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid f = 0 \text{ fast überall}\}.$$

Mit der $\|\cdot\|_2$-Norm ist $L^2(\mathbb{R}^n)$ ein normierter Vektorraum.

Der Satz von Riesz-Fischer gilt hier analog: Er besagt, dass der normierte Vektorraum $L^2(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum, also vollständig ist. Das heisst, dass jede L^2-Cauchyfolge $(f_k)_k$ in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ gegen einen Grenzwert $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ konvergiert. Es gilt $(f_k) \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $\|f - f_k\|_2 \to 0$. Durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge kann man punktweise Konvergenz gegen f fast überall erreichen.

In diesem Fall liegt ein Skalarproduktraum vor: Setzt man für $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x) \mathrm{d}x.$$

und weiter:

$$\langle f + \mathcal{N}, g + \mathcal{N}\rangle := \langle f, g\rangle,$$

so ist $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf $L^2(\mathbb{R}^n)$, mit zugehöriger Norm

$$\|f + \mathcal{N}\| = \langle f + \mathcal{N}, f + \mathcal{N}\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

$L^2(\mathbb{R}^n)$ erhält durch dieses Skalarprodukt die Struktur eines (separablen) Hilbertraums; die Menge der rationalen Treppenfunktionen ist abzählbar und liegt dicht in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Wir erinnern an ein Resultat:

Satz 2.1.3. [Orthogonalprojektion auf vollständige Unterräume]
Sei V ein Hilbertraum und $U \subseteq V$ ein *abgeschlossener* Unterraum; sei

$$U^{\perp} := \{v \in V | \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement*:

1. Dann existiert zu jedem $x \in V$ genau ein $x_U \in U$ mit kleinstem Abstand zu x, d.h.

$$\|x - x_U\| \leq \|x - y\| \quad \text{für alle} \quad y \in U.$$

2. Das Element $x_U \in U$ ist durch $x - x_U \in U^{\perp}$ eindeutig charakterisiert.

3. Es gilt $V = U \oplus U^{\perp}$, der Vektorraum V ist die direkte orthogonale Summe der abgeschlossenen Unterräume U und $U^{\perp}$.

4. Die Zuordnung $x \mapsto x_U$ definiert eine stetige lineare Abbildung $P\colon V \to U$, die *orthogonale Projektion* auf U.

Wir erinnern daran, dass die stetigen linearen Abbildungen zwischen zwei normierten Vektorräumen genau die beschränkten linearen Abbildungen sind, also die linearen Abbildungen $F\colon V_1 \to V_2$, für die die *Operatornorm*

$$\|F\| := \sup_{\|x\|=1} \|F(x)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|}$$

endlich ist. Für die Operatornorm gilt für beschränkte $f_1, f_2\colon V \to V$:

$$\|f_1 \circ f_2\| \leq \|f_1\| \cdot \|f_2\|;$$

dies folgt sofort aus der Abschätzung

$$\|(f_1 \circ f_2)(x)\| \leq \|f_1\| \cdot \|f_2(x)\| \leq \|f_1\| \cdot \|f_2\| \cdot \|x\|,$$

die für jedes $x \in V$ gilt.

Definition 2.1.4

1. *Es seien V und W komplexe Banachräume. Mit*

$$L(V, W) := L_b(V, W)$$

bezeichnen wir den Banachraum aller stetigen *$\mathbb{C}$-linearen Abbildungen $f\colon V \to W$, versehen mit der Operatornorm.*

2. *Speziell bezeichnen wir $L(V) := L(V, V)$ die stetigen Selbstabbildungen und mit V' die stetigen linearen Funktionale,*

$$V' := L(V, \mathbb{C}).$$

Satz 2.1.5. [Darstellungssatz von Riesz]
Sei V ein Hilbertraum und V' der Vektorraum aller *stetigen* linearen Abbildungen $V \to \mathbb{C}$. Dann ist durch

$$\begin{array}{rcl} \phi\colon V & \to & V' \\ x & \mapsto & \phi(x) \end{array}$$

mit

$$\phi(x) := \langle x, \cdot \rangle$$

ein konjugiert-linearer Isomorphismus normierter Vektorräume $\phi\colon V \to V'$ gegeben, mit $\|\phi(x)\| = \|x\|$.

Insbesondere ist jede *stetige* Linearform ("bra") auf einem Hilbertraum V durch das Skalarprodukt mit einem Vektor in V ("ket") darstellbar. Dies ist eine Grundlage des Diracschen Formalismus in der Quantenmechanik.

Wir erinnern (vgl. MfP II) an den

Beweis.

- Die Stetigkeit der Linearform $\phi(x)\colon V \to \mathbb{C}$ ergibt sich aus der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung:
$$|\phi(x)(y)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \text{ für alle } y \in V.$$
Dies liefert zunächst $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$.

  Für $y = x$ erhalten wir Gleichheit in der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung und somit $\|\phi(x)\| = \|x\|$. Es ist klar, dass ϕ konjugiert-linear ist, denn das Hermitesche Skalarprodukt ist in unserer Konvention konjugiert-linear im ersten Argument. Da ϕ die Norm erhält, ist ϕ injektiv.

- Es bleibt noch die Surjektivität von ϕ zu zeigen. Sei dazu $0 \neq \alpha \in V'$. Wir finden dann $v \in V$ mit $\alpha(v) = 1$. Aufgrund der Stetigkeit von α ist $U = \ker \alpha \subseteq V$ ein abgeschlossener und somit vollständiger Unterraum. Wir finden eine orthogonale Zerlegung $V = U \oplus U^\perp$.

  Wir setzen $x_0 := v - v_U \in U^\perp$, wobei $v_U \in U$ die Orthogonalprojektion von v auf U ist. Dann gilt $\alpha(x_0) = \alpha(v) - \alpha(v_U) = 1 - 0 = 1$. Für ein beliebiges $y \in V$ ist daher die orthogonale Zerlegung
$$y = \underbrace{(y - \alpha(y)x_0)}_{\in \ker \alpha} + \alpha(y)x_0 \in U \oplus U^\perp.$$
Somit ist $\langle \frac{x_0}{\|x_0\|^2}, y\rangle = \alpha(y) \underbrace{\frac{\langle x_0, x_0\rangle}{\|x_0\|^2}}_{1}$. Wir können also schreiben: $\alpha = \phi(\frac{x_0}{\|x_0\|^2})$.

□

Definition 2.1.6
Eine Teilmenge U eines (Euklidischen oder) Hermiteschen Vektorraums V ist eine orthonormale Familie, *wenn $\langle u, u\rangle = 1$ für alle $u \in U$ und $\langle u, v\rangle = 0$ für alle $u, v \in U$ mit $u \neq v$ gilt.*

Bemerkungen 2.1.7.

1. Aus einer abzählbaren Menge $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ von linear unabhängigen Vektoren des Hermiteschen Vektorraums V kann man immer eine orthonormale Familie konstruieren. Wir beginnen mit $v_0 := u_0$, und konstruieren Vektoren v_n, w_n per vollständiger Induktion. Wenn die Vektoren v_k, w_k für alle $k = 0, \ldots, n-1$ bereits definiert sind, dann definieren wir v_n, w_n durch

$$v_n := u_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k w_k, \qquad w_n := \frac{1}{\|v_n\|} v_n.$$

   Es gilt dabei $\langle w_k, v_n \rangle = 0$ für alle $k = 0, \ldots, n-1$ genau dann, wenn $a_k = \langle w_k, u_n \rangle$ gilt, was wir nun annehmen wollen.

2. Ist V separabel, so ist jede orthonormale Familie $(v_i)_{i \in I}$ höchstens abzählbar.

Satz 2.1.8 (Besselsche Ungleichung und Parsevalsche Gleichung)**.**
Sei V ein Hilbertraum und $(v_0, v_1, \ldots)$ eine (abzählbare) orthonormale Familie. Für einen Vektor $x \in V$ nennen wir $\alpha_k := \langle v_k, x \rangle$ den k-ten *Fourierkoeffizienten* von x bezüglich der Familie $(v_0, v_1, \ldots)$. Dann gilt für alle $x \in V$:

$$\sum_k |\alpha_k|^2 \leq \|x\|^2.$$

Die Folge $(\sum_{k=0}^n \alpha_k v_k)$ ist Cauchy-Folge in V. Da V als Hilbertraum vollständig ist, besitzt sie in V einen Grenzwert. Dieser Grenzwert ist gleich x ist genau dann, wenn

$$\sum_k |\alpha_k|^2 = \|x\|^2.$$

Definition 2.1.9
Sei V ein Hermitescher Vektorraum. Eine orthonormale Familie $(v_1, v_2, \ldots)$ heißt Hilbertbasis*, wenn jeder Vektor $x \in V$ eine Darstellung als Reihe $x = \sum_{k=1}^\infty \langle v_k, x \rangle v_k$ besitzt.*

Bemerkungen 2.1.10.

1. Vorsicht: Eine Hilbertbasis ist im Allgemeinen *keine* Basis im Sinne einer Vektorraumbasis.

2. Die Funktionen $\phi_n(x) = x^n e^{-x^2}$ liegen in $L^2(\mathbb{R})$. Mit dem obigen Verfahren erhält man eine orthonormale Familie von Funktionen $\psi_n \in L^2(\mathbb{R})$. Wir werden bald sehen, dass diese eine Hilbertbasis darstellen.

Der folgende Satz aus der MfP II gibt nützliche Charakterisierungen von Hilbertbasen.

Theorem 2.1.11.
Für eine orthonormale Familie $B = (b_1, b_2, \ldots)$ von Vektoren eines Hermiteschen Vektorraums V sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Der Unterraum $\mathrm{span}\{b_1, b_2, \ldots\}$, der von der Familie B durch (endliche) Linearkombinationen erzeugt wird, ist dicht in V.

2. B ist eine Hilbertbasis.

3. Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle b_k, x\rangle}\langle b_k, y\rangle. \tag{7}$$

4. Für alle $x \in V$ gilt die *Parsevalsche Gleichung*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle b_k, x\rangle|^2.$$

Wir erinnern an den

Beweis.

1. $\Rightarrow$ 2.: Da das Erzeugnis von B dicht liegt, existiert zu jedem $x \in V$ eine Folge $x_i \in \operatorname{span}\{b_1, b_2, \ldots\}$ mit $x = \lim_{i\to\infty} x_i$. Wir definieren N_i so, dass

$$x_i \in U_i := \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_{N_i}\},$$

wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass $N_i \in \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Folge ist.

Für die orthogonale Projektion $x_i' := \sum_{k=1}^{N_i}\langle b_k, x\rangle b_k$ des Vektors x auf den endlichdimensionalen und daher abgeschlossenen Unterraum U_i gilt nach Satz 2.1.3

$$\|x - x_i'\| \leq \|x - x_i\|.$$

Für $i \to \infty$ folgt daraus $\|x - x_i'\| \to 0$, und somit

$$x = \lim_{i\to\infty} x_i' = \sum_{k=1}^{\infty}\langle b_k, x\rangle b_k.$$

2. $\Rightarrow$ 3.:
Wenn $B = (b_1, b_2, \ldots)$ eine Hilbertbasis ist, so können wir $x, y \in V$ schreiben als

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i b_i, \quad y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j b_j,$$

mit $x_i = \langle b_i, x\rangle$ und $y_j = \langle b_j, y\rangle$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} x_i b_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_i}\langle b_i, y\rangle \\ \langle b_i, y\rangle &= \left\langle b_i, \sum_{j=1}^{\infty} y_j b_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \langle b_i, b_j\rangle = y_i\end{aligned}$$

und somit

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_i} y_i.$$

3. $\Rightarrow$ 4.: Setze $x = y$.

4. $\Rightarrow$ 1.: Aus der Parsevalschen Gleichung folgt nach dem vorhergehenden Satz 2.1.8, dass $x = \sum_k \langle b_k, x\rangle b_k$ für alle $x \in V$ ist. Damit gilt 1.

□

Lemma 2.1.12. Die in Bemerkung 2.1.10 definierten Funktionen ψ_n bilden eine Hilbertbasis von $L^2(\mathbb{R})$.

Beweis.
Sei U der Abschluss der von den Funktionen ψ_n aufgespannten Unterräume von $L^2(\mathbb{R})$, und sei f ein Element im orthogonalen Komplement $U^\perp$ von U. Dann gilt insbesondere

$$\langle \phi_n, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2} f(x)dx = 0 \quad \text{für alle } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Wir können eine Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch das folgende Integral definieren:

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{ixz} e^{-x^2} f(x)dx.$$

Die Funktion F ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch, und es gilt

$$F^{(n)}(0) = i^n \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2} f(x)dx = 0 \qquad \text{für alle } n = 0, 1, \ldots.$$

Da alle Koeffizienten der Taylor-Reihe von F um $z = 0$ verschwinden, gilt $F = 0$. Das aber impliziert das Verschwinden der Fourier-Transformation der Funktion $g(x) = e^{-x^2} f(x)$. Dank der Inversionsformel für die Fourier-Transformation folgt daraus $g = 0$, und somit $f = 0$. Somit ist $U^\perp = \{0\}$, und $L^2(\mathbb{R}) = U \oplus U^\perp = U$. □

Die Folgen sind bemerkenswert: Beliebige Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ lassen sich als (unendliche) Linearkombinationen von den einfachen Funktionen ψ_n oder ϕ_n darstellen,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \psi_n(x), \qquad f_n = \langle \psi_n, f\rangle.$$

Weiterhin werden wir in Satz 2.2.6 sehen, dass $\Phi : f \mapsto (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bijektive Abbildung $\Phi : L^2(\mathbb{R}) \to \ell^2$ definiert, mit der Eigenschaft, dass

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \Phi(f), \Phi(g)\rangle_{\ell^2},$$

eine unmittelbare Konsequenz von Gleichung (7). In anderen Worten: $L^2(\mathbb{R})$ ist als Hilbertraum *isomorph* zu ℓ^2.

Satz 2.1.13 (Existenz von Hilbertbasen)**.**
Jeder (unendlich-dimensionale, separable) Hilbertraum V besitzt eine abzählbare Hilbertbasis $B = (b_1, b_2, \ldots)$.

Funktionenräume bilden wichtige Beispiele für Hilberträume und Banachräume. Umgekehrt erlauben es die Begriffsbildungen der Funktionalanalysis, über Räume von Funktionen geometrisch zu denken. Es war ein wichtiger Schritt in der Entwicklung der Analysis, über *Räume* von Funktionen und nicht nur über einzelne Funktionen nachzudenken.

Definition 2.1.14
Sei $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für eine beliebige Funktion $f\colon U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist die L^p-Halbnorm bezüglich $U \subseteq \mathbb{R}^n$ wie folgt erklärt:

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\|f_U^p\|_1},$$

wobei wir $f_U := f\mathbf{1}_U$ und $\sqrt[p]{\infty} := \infty$ setzen.

Lemma 2.1.15.
Für die L^p-Halbnorm bezüglich $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gelten die folgenden Aussagen:

1. $\|f\|_p = 0$ dann und nur dann, wenn $f = 0$ fast überall gilt.
2. Die Halbnorm ist homogen, $\|cf\|_p = |c| \cdot \|f\|_p$.
3. Die Halbnorm ist monoton: $|f| \leq |g| \Rightarrow \|f\|_p \leq \|g\|_p$.
4. Es gilt die Dreiecksungleichung: $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.
5. Hat U endliches Volumen, $v(U) < \infty$, so gilt $\|f\|_1 \leq v(U)^{1/q} \cdot \|f\|_p$, wobei $1/p + 1/q = 1$ ist.

Bemerkungen 2.1.16.

1. Sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen und sei die Funktion $f\colon U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ lokal-integrierbar. Dann heißt f eine L^p-Funktion oder p-fach integrierbar, wenn die Funktion $|f|^p$ integrierbar ist.

   Eine lokal-integrierbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist genau dann p-fach integrierbar, wenn $\|f\|_p < \infty$ gilt. Für $p = 2$ sprechen wir von quadratintegrierbaren Funktionen.

2. Wir erinnern an die Bezeichnung des Funktionenraums

   $$\mathcal{L}^p(U) := \{f\colon U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid f \text{ ist } L^p\text{-Funktion}\},$$

   dies ist ein komplexer Vektorraum mit der Halbnorm $\|\cdot\|_p$,

   und an die Bezeichnung des Quotientenraums

   $$L^p(U) := \mathcal{L}^p(U)/\mathcal{N}$$

   nach dem Unterraum

   $$\mathcal{N} = \{f\colon U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} |\ f = 0 \text{ fast überall}\}.$$

   Mit der $\|\cdot\|_p$-Norm ist $L^p(U)$ ein normierter Vektorraum.

3. Aus dem Satz von Riesz-Fischer folgt, dass der normierte Vektorraum $L^p(U)$ ein Banachraum ist, also vollständig ist, also dass jede L^p-Cauchyfolge $(f_k)_k$ in $\mathcal{L}^p(U)$ gegen einen L^p-Grenzwert f konvergiert. Durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge kann man punktweise Konvergenz gegen f fast überall erreichen.

4. Bei der L^2-Konvergenz sprechen wir auch von *Konvergenz im quadratischen Mittel*. Es gilt $(f_k) \to f$ bzgl. L^2 genau dann, wenn $\|f - f_k\|_2 \to 0$.

In diesem Fall liegt ein Skalarproduktraum vor:

Satz 2.1.17.
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere offene Menge. Setzt man für $f, g \in \mathcal{L}^2(U)$:

$$\langle f, g\rangle := \int_U \overline{f(x)} g(x) \mathrm{d}x.$$

und weiter:

$$\langle f + \mathcal{N}, g + \mathcal{N}\rangle := \langle f, g\rangle,$$

so ist $\langle\, ,\,\rangle$ ein Skalarprodukt auf $L^2(U)$, mit zugehöriger Norm

$$\|f + \mathcal{N}\| = \langle f + \mathcal{N}, f + \mathcal{N}\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

$L^2(U)$ erhält durch dieses Skalarprodukt die Struktur eines (separablen) Hilbertraums; die Menge der rationalen Treppenfunktionen mit Träger in U ist abzählbar und liegt dicht in $\mathcal{L}^2(U)$.

Bemerkungen 2.1.18.
Es gibt noch andere wichtige Hilbert-Räume. Ein Beispiel sind *Sobolev-Räume*, die zum Beispiel in der Theorie partieller Differentialgleichungen und von Schrödinger-Operatoren eine wichtige Rolle spielen.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Jede Funktion in $\mathcal{L}^p(U)$ ist insbesondere lokal integrierbar und definiert daher eine reguläre Distribution und hat eine Ableitung im distributionellen Sinne, die *schwache Ableitung* von f, die wir jetzt mit $D^\alpha f$ bezeichnen.

Das Beispiel der Heavisideschen Sprungfunktion zeigt, dass die schwache Ableitung nicht unbedingt eine reguläre Distribution ist. Wir können aber auf diejenigen Funktionen einschränken, für die dies der Fall ist.

Der Sobolev-Raum $W^{k,p}$ für $p \geq 1$ und $k \in \mathbb{N}$ ist

$$W^{k,p}(U) := \{f \in L^p(U) | D^\alpha f \in L^p(U) \text{ für alle Multiindizes } |\alpha| \leq k\}.$$

Mit der Sobolev-Norm

$$\|f\|_{k,p} := \sqrt[p]{\sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha f\|_p)^p}$$

erhält man Banachräume. Für $p = 2$ erhält man einen Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle.$$

Auch in diesen Banachräumen liegt der Unterraum $C_c^\infty(U)$ der glatten Funktionen mit kompakten Träger dicht.

Soweit die Erinnerung (an MfP II und MfP III).

2.2 Grundlegendes zu Operatoren auf Hilberträumen

Messbaren Grössen werden in der Quantenmechanik Operatoren auf einem Hilbert-Raum (wie z.B. dem Raum $L^2(\mathbb{R}^3)$) zugeordnet. Was genau mit dem Begriff "Operator" gemeint ist, bedarf einiger Erklärungen. In diesem Abschnitt wollen wir wichtige Beispiele, und einige wichtige Klassen von Operatoren kennenlernen.

Eine besonders wichtige Rolle spielen für die Quantenmechanik die *selbstadjungierten* Operatoren. Reellwertigen Messgrößen ordnet die Axiomatik der Quantenmechanik selbstadjungierte Operatoren zu. Wir werden sehen, dass die Eigenschaft der Selbstadjungiertheit garantiert, dass der mathematische Formalismus der Quantenmechanik immer nur rein reelle Werte für die Messwerte selbstadjungierter Operatoren vorhersagt. Die genaue Definition der Eigenschaft, selbstadjungiert zu sein, erweist sich allerdings als etwas subtil. Beispiele für Operatoren, die sich als selbstadjungiert herausstellen werden, sind:

$$\begin{aligned} &\text{Ortsoperator } \hat{x}: \quad \psi(x) \mapsto (\hat{x}\psi)(x) = x\psi(x), \\ &\text{Impulsoperator } \hat{p}: \quad \psi(x) \mapsto (\hat{p}\psi)(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x). \end{aligned} \qquad \psi \in L^2(\mathbb{R}).$$

Beachten Sie, dass wir für das Resultat der Anwendung einer linearen Abbildung F auf einen Vektor v eines (normierten) Vektorraums sowohl die Notation $F(v)$ oft auch die "Operatornotation" Fv verwenden.

Bei der Verwendung der oben angegebenen Operatoren ist Vorsicht geboten. Der Ortsoperator $\hat{x}$, z.B., ist *keine* lineare Abbildung von $L^2(\mathbb{R})$ nach $L^2(\mathbb{R})$. Die Funktion $\psi(x) = (1+x^2)^{-1/2}$, z.B., ist in $L^2(\mathbb{R})$, $(\hat{x}\psi)(x) = x(1+x^2)^{-1/2}$ ist aber nicht in $L^2(\mathbb{R})$. Zur vollständigen Definition des Operators $\hat{x}$ wird man daher insbesondere die Menge derjenigen Funktionen ψ definieren müssen, auf denen $\hat{x}$ definiert sein soll. Dies ist zu beachten, wenn man eine konsistente physikalische Theorie entwickeln will, die auf der Mathematik von Operatoren auf Hilberträumen aufbaut.

Der Operator $\hat{x}$ ist ein Beispiel für einen Operator, der nicht beschränkt sein kann: Der durch die Funktion $\psi(x) = (1+x^2)^{-1/2}$ dargestellte Vektor $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ erfüllt $\|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx < \infty$, aber $\|\hat{x}(\psi)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |x\psi_v(x)|^2 dx = \infty$, somit gilt $\|\hat{x}\| = \infty$. In einigen Anwendungen kann man die damit verbundenen mathematischen Schwierigkeiten umgehen: Wenn der Operator $\hat{x}$ die Ortsmessung beschreibt, dann ist es naheliegend, der Messung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Ortes einen Operator m_f, definiert durch $\psi \mapsto m_f\psi$, $(m_f\psi)(x) := f(x)\psi(x)$ als "Ersatz" für den Operator $\hat{x}$ zuzuordnen. Wenn f beschränkt ist, $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\|m_f(v)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)\psi_v(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |\psi_v(x)|^2 dx \leq M^2 \int_{\mathbb{R}} |\psi_v(x)|^2 dx = M^2\|v\|^2 < \infty,$$

und insbesondere gilt dann $\|m_f\| = M$ und m_f ist somit beschränkt. Wenn f auch noch stetig und monoton ist, dann kann man den Ort x eindeutig durch "Messung" von $f(x)$ bestimmen.

Wichtige Klassen von beschränkten Operatoren sind die isometrischen und die unitären Operatoren. Unitäre Operatoren zum Beispiel werden in der Quantenmechanik zur Beschreibung von Symmetrien physikalischer Systeme benutzt.

Definition 2.2.1
Es seien H_1 und H_2 Hilberträume, D ein Untervektorraum von H_1 und R ein Untervektorraum von H_2. Sei $f\colon D \to R$ eine surjektive lineare Abbildung.

1. *Dann heißt f* isometrisch *oder* Isometrie, *wenn für alle $x \in D$ die Gleichheit $\|f(x)\| = \|x\|$ gilt. (Dabei haben wir dasselbe Zeichen $\|\cdot\|$ für die Normen in den Hilberträumen H_1 und H_2 verwendet.) Insbesondere sind isometrische Abbildungen stetig.*

2. *Eine isometrische Abbildung heißt* unitär, *wenn zusätzlich $D = H_1$ und $R = H_2$ gilt.*

Beispiel 2.2.2. Der Translationsoperator

$$T_a : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \qquad (T_a\psi)(x) := \psi(x-a),$$

ist unitär, weil

$$\|T_a\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x-a)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = \|\psi\|^2.$$

In der zweiten Gleichung wurde die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes verwendet.

Wir brauchen einige Hilfsmittel zum Skalarprodukt:

Lemma 2.2.3 (Polarisierung)**.**
Sei H ein Hilbertraum. Dann legt die Norm das Skalarprodukt eindeutig fest: Es gilt für alle $x, y \in H$:

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = \|\frac{x+y}{2}\|^2 - \|\frac{x-y}{2}\|^2 \text{ und } \mathrm{Im}\langle x,y\rangle = \|\frac{x-iy}{2}\|^2 - \|\frac{x+iy}{2}\|^2.$$

Beweis.
Es handelt sich um eine direkte Rechnung:

$$\begin{aligned} \|\frac{x+y}{2}\|^2 - \|\frac{x-y}{2}\|^2 &= \left\langle \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle x,y\rangle + \frac{1}{2}\langle y,x\rangle = \mathrm{Re}\langle x,y\rangle. \end{aligned}$$

Für den Imaginärteil beachten wir

$$\|\frac{x+iy}{2}\|^2 - \|\frac{x-iy}{2}\|^2 = \mathrm{Re}\langle x, iy\rangle = \mathrm{Re}\ i\langle x,y\rangle = -\mathrm{Im}\langle x,y\rangle.$$

□

Beschränkte Operatoren f sind durch die Menge ihrer Erwartungswerte $\langle x, f(x)\rangle$ eindeutig bestimmt:

Korollar 2.2.4.
Seien $f, g \in L(H)$ und gelte für alle $x \in H$

$$\langle x, f(x)\rangle = \langle x, g(x)\rangle.$$

Dann ist $f = g$.

Beweis.
Für $x, y \in H$ ist in Verallgemeinerung von Lemma 2.2.3

$$\begin{aligned} 4\langle x, f(y)\rangle &= \langle x+y, f(x+y)\rangle - \langle x-y, f(x-y)\rangle \\ &\quad + i\langle x-iy, f(x-iy)\rangle - i\langle x+iy, f(x+iy)\rangle. \end{aligned}$$

Damit folgt nach der Voraussetzung $4\langle x, f(y)\rangle = 4\langle x, g(y)\rangle$ für alle $x, y \in H$, also $\langle x, (f-g)(y)\rangle = 0$. Da das Skalarprodukt nicht ausgeartet ist, folgt $f = g$. □

Lemma 2.2.5.
Sei $f\colon D \to H_2$, mit $D \subseteq H_1$, eine isometrische lineare Abbildung. Dann gilt

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \qquad \text{für alle } x, y \in D.$$

Auf dem Wertebereich $R = \operatorname{im} f$ existiert eine isometrische lineare Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon R \to D.$$

Ist f unitär, so ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} unitär.

Beweis.

- Erhält nun f die Norm, so erhält f nach Lemma 2.2.3 auch das Skalarprodukt.
- Eine isometrische Abbildung ist injektiv: Es sei $x \in \ker f$, dann gilt $0 = \|f(x)\| = \|x\|$, woraus $x = 0$ folgt. Also ist f bijektiv und es gibt eine Umkehrfunktion

  $$f^{-1}\colon R \to D.$$

  Umkehrabbildungen linearer Abbildungen sind linear. f^{-1} ist isometrisch, denn zu $y \in R$ gibt es $x \in D$ mit $f(x) = y$, also

  $$\|y\| = \|f(x)\| = \|x\| = \|f^{-1}(y)\|.$$

  Ist f unitär, so hat man $D = H_1$ und $R = H_2$, also ist auch f^{-1} unitär.

$\square$

Satz 2.2.6.
Sei H ein separabler Hilbertraum, dann gibt es eine unitäre lineare Abbildung

$$f\colon H \to \ell^2.$$

Beweis.
Sei $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Hilbertbasis von H. Jeden Vektor $x \in H$ können wir nach der Definition 2.1.9 einer Hilbertbasis in der Form

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k v_k \text{ mit } \mu_k := \langle v_k, x\rangle$$

schreiben. Wir setzen $f(x) := (\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Wegen der Besselschen Ungleichung $\sum_k |\mu_k|^2 \leq \|x\|^2$ ist die Folge $f(x)$ quadratsummierbar, also $f(x) \in \ell^2$. Die so definierte Abbildung $f\colon H \to \ell^2$ ist linear. Nach der Parsevalschen Gleichung gilt

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^2 = \|x\|^2,$$

also ist f eine Isometrie. Wir müssen daher nur noch zeigen, dass f surjektiv ist. Sei $(\beta_k)_{k\geq 0} \in \ell^2$; dann ist $\sum_k |\beta_k|^2 < \infty$. Betrachte die Folge

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \beta_k v_k \in H$$

und finde für $n > m$:

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \beta_k v_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\beta_k|^2.$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in H. Da H vollständig ist, existiert

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k v_k \in H.$$

Es gilt $f(x) = (\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Da $f\colon H \to \ell^2$ die Norm erhält, ist f unitär. □

Nach Lemma 2.2.5 ist auch die Umkehrfunktion einer unitären linearen Abbildung unitär. Für $f\colon H_1 \to \ell^2$ und $g\colon H_2 \to \ell^2$ ist daher auch $g^{-1} \circ f\colon H_1 \to H_2$ unitär. Daher sind alle Hilberträume zueinander isomorph:

Korollar 2.2.7.
Zwischen zwei beliebigen Hilberträumen H_1 und H_2 gibt es eine unitäre lineare Abbildung.

Bemerkungen 2.2.8.

1. Entscheidend sind also nicht Hilberträume, sondern *Abbildungen* zwischen Hilberträumen. Man kann mit einigen Zusatzüberlegungen zeigen, dass die Fouriertransformation zu einer unitären Abbildung $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ führt. Obwohl hier der gleiche Funktionenraum vorliegt, wird man in Anwendungen die Räume nicht identifizieren und z.B. zwischen Impuls- und Ortsraum unterscheiden. Ferner sind die Räume $L^2(\mathbb{R}^n)$ für verschiedene n unitär isomorph, ohne dass es ausgezeichnete Isomorphismen gibt.

2. Tatsächlich können die Funktionenräume noch deutlich verschiedener definiert sein: Sei $\rho \in L^2(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion, die wir uns als Dichteverteilung vorstellen. Dann berechnen wir für jede affine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ das Integral der Dichteverteilung ρ über diese Hypereben. Man nehme etwa den Fall einer affinen Ebene, $n = 2$, und stelle sich vor, mit Hilfe eines Röntgentomographen habe man mit einem Röntgenstrahl entlang jeder Geraden in der Ebene die Gesamtdichte entlang der Geraden gemessen.

   Wir beschreiben eine affine Hyperebene durch ihren Einheitsnormalenvektor $\alpha \in \mathbb{R}^n$ und die Gleichung $\langle \alpha, x\rangle = s$ mit $s \in \mathbb{R}$. Da die Paare (α, s) und $(-\alpha, -s)$ die gleiche affine Hyperebene beschreiben, ist der Raum der Hyperebenen gleich $(S^{n-1} \times \mathbb{R})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Die *Radontransformierte* der Funktion $\rho \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist dann die Funktion

$$\begin{array}{rrcl} R\rho\colon & S^{n-1} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (\alpha, s) & \mapsto & \int_{\langle \alpha, x\rangle = s} \rho(x) \mathrm{d}S(x). \end{array}$$

   Sie setzt L^2-Funktionenräume auf verschiedenen Mannigfaltigkeiten in Beziehung, nämlich $\mathbb{R}^n$ und $S^{n-1} \times \mathbb{R}$.

   Die Frage nach Umkehrabbildungen der Radontransformierten ist von großer praktischer Bedeutung. Wir berechnen die Fouriertransformierte $\hat\rho$ der Dichteverteilung ρ im Punkt $r\alpha \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \hat\rho(r\alpha) &\overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x e^{-2\pi i\langle r\alpha, x\rangle} \rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s \int_{\langle x,\alpha\rangle = s} e^{-2\pi i \langle r\alpha, x\rangle} \rho(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s e^{-2\pi i s r} R\rho(\alpha, s). \end{aligned}$$

Somit legt die Radontransformierte $R\rho$ die Fouriertransformierte von ρ und somit nach dem Umkehrtheorem auch die Dichteverteilung ρ selbst fest. (Für die numerische Implementierung werden allerdings andere Methoden verwendet.)

In unseren Überlegungen hat dabei die Tatsache, dass die fraglichen Funktionenräume abstrakt isomorph sind, überhaupt keine Rolle gespielt.

Satz 2.2.9.
Sei H ein Hilbertraum. Dann gibt es zu jedem $f \in L(H)$ genau eine lineare Abbildung $f^* \in L(H)$, so dass für alle $x, y \in H$ gilt

$$\langle y, f(x) \rangle = \langle f^*(y), x \rangle.$$

Es gilt $\|f^*\| = \|f\|$ und $f^{**} = f$.

Definition 2.2.10
Der Operator f^* heißt der zu f adjungierte Operator. *(Beschränkte) Operatoren f mit $\langle y, f(x) \rangle = \langle f(y), x \rangle$, für alle $x, y \in H$, nennen wir* symmetrisch *oder auch* selbstadjungiert.

Beweis.

- Sei $x \in H$ fest. Dann ist die Linearform

$$g_x \colon H \to \mathbb{C} \text{ mit } g_x(y) := \langle x, f(y) \rangle$$

stetig, denn für $\|y\| \leq 1$ ist nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|g_x(y)| \leq \|x\| \cdot \|f(y)\| \leq \|x\| \cdot \|f\|.$$

Also ist $g_x \in H'$ und nach dem Rieszschen Darstellungssatz 2.1.5 gibt es genau ein $h(x) \in H$ mit

$$g_x(y) = \langle h(x), y \rangle \text{ für alle } y \in H,$$

also

$$\langle h(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \text{ für alle } x, y \in H.$$

- Die so definierte Abbildung $h \colon H \to H$ ist linear, denn für $y, x, x' \in H$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}\langle h(\lambda x + \mu x'), y \rangle &= \langle \lambda x + \mu x', f(y) \rangle = \overline{\lambda} \langle x, f(y) \rangle + \overline{\mu} \langle x', f(y) \rangle \\ &= \overline{\lambda} \langle h(x), y \rangle + \overline{\mu} \langle h(x'), y \rangle = \langle \lambda h(x) + \mu h(x'), y \rangle.\end{aligned}$$

Da $h(\lambda x + \mu x') \in H$ eindeutig bestimmt ist, folgt

$$h(\lambda x + \mu x') = \lambda h(x) + \mu h(x').$$

Die Abbildung h ist stetig, denn für $x, y \in H$ und $\|x\| \leq 1$ gilt

$$|\langle h(x), y \rangle| = |\langle x, f(y) \rangle| \leq \|x\| \|f(y)\| \leq \|x\| \|f\| \|y\| \leq \|f\| \|y\|.$$

Mit $y = h(x)$ folgt

$$\|h(x)\|^2 \leq \|f\| \|h(x)\|, \text{ also } \|h\| \leq \|f\|.$$

Also ist $h \in L(H)$. Wir finden somit

$$(*) \qquad \|f^*\| \leq \|f\|.$$

- Aus
$$\langle x, h(y)\rangle = \overline{\langle h(y), x\rangle} = \overline{\langle y, f(x)\rangle} = \langle f(x), y\rangle$$
für alle $x, y \in H$ folgt $h^* = f$, also $(f^*)^* = f$.

- Die erneute Anwendung von $(*)$ liefert
$$\|f\| = \|(f^*)^*\| \leq \|f^*\|,$$
so dass wir die Gleichheit $\|f\| = \|f^*\|$ gezeigt haben.

□

Beispiel 2.2.11.
Sei $H = \ell^2$. Dann hat der Verschiebeoperator (nach rechts) $T \in L(H)$ mit $T(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots)$ Norm Eins. Sein adjungierter Operator ist der Verschiebeoperator nach links $T^*(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, denn es gilt für alle $x, y \in \ell^2$:
$$\langle y, Tx\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{y_i} x_{i-1} = \langle T^* y, x\rangle.$$

Ähnlich wie für formal adjungierte Operatoren zeigt man:

Lemma 2.2.12.
Sei H ein Hilbertraum; seien $f, f_1, f_2 \in L(H)$ und f^*, f_1^*, f_2^* die zugehörigen adjungierten Operatoren. Dann gilt:

1. Adjunktion ist konjugiert linear: $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^* = \overline{\lambda_1} f_1^* + \overline{\lambda_2} f_2^*$ für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.
2. $(f_2 \circ f_1)^* = f_1^* \circ f_2^*$.
3. Existiert der inverse Operator $f^{-1} \in L(H)$, so existiert auch $(f^*)^{-1} \in L(H)$ und es ist $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Lemma 2.2.13.
Für einen *selbstadjungierten* beschränkten Operator $A : H \to H$ auf einem Hilbertraum H gilt
$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, x\rangle|$$

Beweis.

- Sei
$$\nu := \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, x\rangle|;$$
es gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für alle $x \in H$ mit $\|x\| \leq 1$:
$$|\langle A(x), x\rangle| \leq \|A(x)\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2 \leq \|A\|,$$
und somit $\nu \leq \|A\|$.

- Wir erinnern an die Parallelogrammgleichung, die für Normen gilt, die von einem Skalarprodukt herkommen:

$$(*) \qquad \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \text{ für } v, w \in H.$$

Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ und $x \in H$ mit $\|x\| \leq 1$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
4\|A(x)\|^2 &= 2\langle Ax, Ax\rangle + 2\langle A^2x, x\rangle \qquad [A \text{ selbstadjungiert}]\\
&= \left\langle A(\lambda x + \frac{1}{\lambda}A(x)), \lambda x + \frac{1}{\lambda}A(x)\right\rangle - \left\langle A(\lambda x - \frac{1}{\lambda}A(x)), \lambda x - \frac{1}{\lambda}A(x)\right\rangle\\
&\leq \nu \cdot \left(\|\lambda x + \frac{1}{\lambda}A(x)\|^2 + \|\lambda x - \frac{1}{\lambda}A(x)\|^2\right)\\
&\stackrel{(*)}{=} 2\nu(\lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|A(x)\|^2).
\end{aligned}$$

Für $A(x) \neq 0$ setzen wir $\lambda := \sqrt{\frac{\|A(x)\|}{\|x\|}}$ und erhalten

$$4\|A(x)\|^2 \leq 2\nu \cdot 2\|x\|\|A(x)\|,$$

und somit

$$\|A(x)\| \leq \nu \cdot \|x\|.$$

Die Ungleichung gilt sicher auch für $A(x) = 0$; somit folgt auch $\|A\| \leq \nu$.

□

Korollar 2.2.14.
Hieraus folgt die wichtige Eigenschaft der Operatornorm

$$\|T^*T\| \stackrel{2.2.13}{=} \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^*Tx, x\rangle| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|^2 = \|T\|^2.$$

Satz 2.2.15.
Sei H ein Hilbertraum.

1. Sei p orthogonaler Projektor auf einen abgeschlossenen Unterraum U. Dann gilt $p \in L(H)$ und $p^2 = p$ (man sagt: p ist idempotent, d.h. ein Projektor) und außerdem gilt $p^* = p$ (d.h. p ist selbstadjungierter Operator auf H).

2. Sei umgekehrt $p \in L(H)$ ein stetiger linearer Operator, für den $p^* = p$ und $p^2 = p$ gilt; dann ist p ein orthogonaler Projektor auf einen abgeschlossenen Unterraum.

Beweis.

- Sei H ein Hilbertraum und $U \subseteq H$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Nach Satz 2.1.3 gibt es die orthogonale Zerlegung $H = U \oplus U^\perp$, die es uns erlaubt, jedem $x \in H$ eindeutig $x_1 \in U$ und $x_2 \in U^\perp$ mit $x = x_1 + x_2$ zuzuordnen. Der orthogonale Projektor von H auf U ist dann

$$p(x) := x_1.$$

- Die Abbildung p ist offenbar linear. Wegen

$$\|x\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2\rangle = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|p(x)\|^2,$$

  gilt $\|p(x)\| \leq \|x\|$ und damit $\|p\| \leq 1$. Ist $U = \{0\}$, so ist $p = 0$ und damit $\|p\| = 0$. Ist $U \neq \{0\}$, so gibt es ein $z \in U$ mit $\|z\| = 1$. Es gilt $p(z) = z$ und somit $\|p(z)\| = \|z\|$, also $\|p\| = 1$. Insbesondere ist ein orthogonaler Projektor p stetig.

- Um zu sehen, dass p selbstadjungiert ist, finde für $x, y \in H$ eindeutig bestimmte Vektoren $x_1, y_1 \in U$ und $x_2, y_2 \in U^\perp$ mit $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$. Wir rechnen:

$$\langle p(x), y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1\rangle = \langle x, p(y)\rangle,$$

  also ist p selbstadjungiert, $p^* = p$.

- Für $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in U$, $x_2 \in U^\perp$ ist

$$p(p(x)) = p(x_1) = x_1 = p(x),$$

  also sind orthogonale Projektoren Idempotente, $p^2 = p$.

- Sei nun umgekehrt $p \in L(H)$ ein stetiger linearer Operator, für den $p^* = p$ und $p^2 = p$ gilt. Wir setzen $U := \{z \in H | p(z) = z\}$. Da p linear ist, ist

$$U = \{z \in H | (p - \mathrm{id}_H)(z) = 0\} = \ker(p - \mathrm{id}_H)$$

  ein Untervektorraum; $U = (p - \mathrm{id}_H)^{-1}(\{0\})$ ist als Urbild des abgeschlossenen Unterraums $\{0\}$ unter der stetigen Abbildung $p - \mathrm{id}_H$ abgeschlossen. Jedes $x \in H$ lässt sich als Summe

$$x = p(x) + (x - p(x))$$

  schreiben. Wegen $p(p(x)) = p^2(x) = p(x)$ gilt $p(x) \in U$. Für jedes $z \in U$ gilt

$$\begin{aligned}\langle z, x - p(x)\rangle &= \langle z, x\rangle - \langle z, p(x)\rangle \\ &= \langle z, x\rangle - \langle p(z), x\rangle \text{ [wegen } p^* = p] \\ &= \langle z - p(z), x\rangle = \langle 0, x\rangle = 0.\end{aligned}$$

  Also ist $x - p(x) \in U^\perp$. Nach Satz 2.1.3 ist p der orthogonale Projektor von H auf den abgeschlossenen Unterraum U.

□

Wir halten gleich einige Eigenschaften von orthogonalen Projektoren fest. Dafür brauchen wir:

Definition 2.2.16
Sei H ein Hilbertraum. Ein Operator $T \in L(H)$ heißt positiv, *wenn $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in H$ gilt. Wir schreiben dann $T \geq 0$ und, falls $T_2 - T_1 \geq 0$ gilt, auch $T_2 \geq T_1$.*

Man zeigt leicht:

Bemerkungen 2.2.17.
Es seien p, p_1, p_2 orthogonale Projektoren auf abgeschlossene Unterräume von H. Wir setzen $U := p(H)$ und $U_j := p_j(H)$. Es sei $f \in L(H)$.

1. Es gilt $f(U) \subseteq U$ genau dann, wenn $f \circ p = p \circ f \circ p$ gilt.
2. Es gilt $f(U) \subseteq U$ und $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$ genau dann, wenn $f \circ p = p \circ f$ gilt.
3. Gilt $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$, so ist auch $p_1 \circ p_2$ ein orthogonaler Projektor mit Bild
$$(p_1 \circ p_2)(H) = U_1 \cap U_2.$$
4. Gilt $p_1 \circ p_2 = 0$, so gilt auch $p_2 \circ p_1 = 0$. In diesem Fall sind die Unterräume U_1 und U_2 zueinander orthogonal und $p_1 + p_2$ ist der orthogonale Projektor auf den abgeschlossenen Untervektorraum
$$U_1 \oplus U_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}.$$
5. Es gilt $p_1 \leq p_2$ genau dann, wenn für alle $x \in H$ gilt $\|p_1(x)\| \leq \|p_2(x)\|$. Insbesondere gilt für einen orthogonalen Projektor $0 \leq p \leq \mathrm{id}_H$.

Lemma 2.2.18.
Seien p_1, p_2 orthogonale Projektoren auf H. Wir setzen $U_j := p_j(H)$ für $j = 1, 2$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $p_1 \leq p_2$.

(ii) $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = p_1$.

(iii) $U_1 \subseteq U_2$.

(iv) $p_2 - p_1$ ist ein orthogonaler Projektor.

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Da p_2 ein orthogonaler Projektor ist, gilt auch $(\mathrm{id} - p_2)^2 = \mathrm{id} - p_2$ und $(\mathrm{id} - p_2)^* = \mathrm{id} - p_2$, also ist auch $\mathrm{id} - p_2$ ein orthogonaler Projektor. Somit gilt
$$\begin{aligned}\|((\mathrm{id} - p_2) \circ p_1)(x)\|^2 &= \langle(\mathrm{id} - p_2)(p_1(x)), (\mathrm{id} - p_2)(p_1(x))\rangle \\ &= \langle(\mathrm{id} - p_2)(p_1(x)), p_1(x)\rangle.\end{aligned}$$
Aus $p_1 \leq p_2$ folgt $\mathrm{id} - p_2 \leq \mathrm{id} - p_1$, somit können wir den Ausdruck abschätzen
$$\ldots \leq \langle(\mathrm{id} - p_1)(p_1(x)), p_1(x)\rangle = \langle 0, p_1(x)\rangle = 0.$$
Es folgt $(\mathrm{id} - p_2) \circ p_1 = 0$ und somit $p_1 = p_2 \circ p_1$. Andererseits gilt
$$p_1 = p_1^* = (p_2 \circ p_1)^* = p_1^* \circ p_2^* = p_1 \circ p_2.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Für $y \in U_1$ ist
$$y = p_1(y) = (p_2 \circ p_1)(y) = p_2(y), \text{ und somit } y \in U_2.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Es ist $(p_2 - p_1)^* = p_2^* - p_1^* = p_2 - p_1$, und jedes $x \in H$ lässt sich eindeutig zerlegen in $x = x_2 + x''$ mit $x_2 \in U_2$ und $x'' \in U_2^\perp$.

Wegen $U_1 \subseteq U_2$ kann man x_2 weiter zerlegen in $x_2 = x_1 + x'$ mit $x_1 \in U_1$ und $x' \in U_1^\perp$. Insgesamt finden wir eine Zerlegung
$$x = x_1 + x' + x'',$$

Beachten wir, dass $p_1(x) = x_1$ gilt, so finden wir für alle $x \in H$

$$(p_1 \circ p_2)(x) = p_1(x_1 + x') = x_1 = p_1(x)$$

und

$$(p_2 \circ p_1)(x) = p_2(x_1) = x_1 = p_1(x)$$

und rechnen damit

$$(p_2 - p_1)^2(x) = p_2(x) - (p_2 \circ p_1)(x) - (p_1 \circ p_2)(x) + p_1(x) = p_2(x) - p_1(x),$$

also gilt auch $(p_2 - p_1)^2 = p_2 - p_1$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Es gilt für alle $x \in H$

$$\langle (p_2 - p_1)(x), x \rangle = \langle (p_2 - p_1)(x), (p_2 - p_1)(x) \rangle \geq 0,$$

also ist $p_2 \geq p_1$.

□

Definition 2.2.19
Seien M und M' metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon M \to M'$ heißt eine offene Abbildung, *wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$ das Bild $f(U)$ offen in M' ist.*

Den folgenden Satz möchten wir hier nicht beweisen und verweisen auf [H, §39]; er wird aber noch wichtig sein:

Theorem 2.2.20 (Satz von der offenen Abbildung)**.**
Seien V, W komplexe Banachräume.

1. Die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ sei stetig. Genau dann, wenn der Bildraum $f(V) \subseteq W$ abgeschlossen ist, ist die (surjektive) Abbildung $f\colon V \to f(V)$ offen.

2. Insbesondere ist jede lineare surjektive stetige Abbildung $f\colon V \to W$ offen.

Korollar 2.2.21.
Seien V, W komplexe Banachräume und $f\colon V \to W$ eine $\mathbb{C}-$lineare, stetige und bijektive Abbildung. Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon W \to V$ stetig.

Man kann diese Aussage auch so ausdrücken: Ist die inhomogene lineare Gleichung $f(x) = w$ mit f stetig für jedes $w \in W$ eindeutig lösbar, so hängt die Lösung stetig von w ab.

Wir brauchen häufiger das folgende Lemma:

Lemma 2.2.22.
Seien V_1, V_2 Banachräume und $W_1 \subseteq V_1$ ein dichter Unterraum (d.h. der Abschluss $\overline{W_1}$ ist der Banachraum V_1). Sei $T\colon W_1 \to V_2$ eine *beschränkte lineare Abbildung*. Dann kann T eindeutig zu einem beschränkten (linearen) Operator $\tilde{T}\colon V_1 \to V_2$ mit der gleichen Norm fortgesetzt werden.

Beweis.

- Sei (x_n) eine Folge im Unterraum W_1, die gegen ein Element $v \in V_1$ konvergiert. Diese Folge ist als konvergente Folge insbesondere eine Cauchy-Folge. Wegen $\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|T\| \cdot \|x_n - x_m\|$ ist auch die Folge Tx_n aller Bildwerte eine Cauchy-Folge. Da V_2 vollständig ist, konvergiert diese Folge.

- Der Grenzwert hängt nur von $v \in V_1$ ab: denn sei (x'_n) eine weitere Folge in V, die auch gegen v konvergiert, so hat hat nach dem gleichen Argument auch die Folge (Tx'_n) einen Grenzwert in V_2. Da auch die Folge $Tx_1, Tx'_1, Tx_2, Tx'_2, \ldots$ einen Grenzwert hat, müssen die Grenzwerte der beiden Folgen übereinstimmen. Setze $\tilde{T}(v)$ gleich diesem Grenzwert.

- Man überprüft leicht, dass $\tilde{T}$ eindeutig bestimmt und linear ist, und es ist klar, dass $\|\tilde{T}\| \geq \|T\|$ gilt. Aus der Stetigkeit der Norm und von T folgt mit

$$\|\tilde{T}v\| = \| \lim_{n\to\infty} Tx_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \leq \|T\| \cdot \|v\|$$

die Stetigkeit von $\tilde{T}$ und die Ungleichung $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$.

□

Den folgenden Konvergenzbegriff werden wir noch benötigen:

Definition 2.2.23
Sei V ein komplexer Banachraum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $x_n \in V$ heißt schwach konvergent *gegen $x \in V$, wenn für jede stetige Linearform $\lambda \in V' = L(V, \mathbb{C})$ die Folge komplexer Zahlen $\lambda(x_n)$ gegen $\lambda(x)$ konvergiert. Wir schreiben dann $x_n \rightharpoonup x$.*

Betrachtung 2.2.24.

1. Als Folgerungen zweier Hauptsätze der Funktionalanalysis, die wir aber in dieser Vorlesung nicht behandeln möchten (siehe aber z.B. [H]), halten wir fest:

   Jede schwach konvergente Folge eines normierten Vektorraums ist beschränkt (Folgerung aus dem Satz von Banach-Steinhaus).
   Wenn eine Folge schwach konvergiert, so ist ihr Grenzwert eindeutig. Denn würde gelten $x_n \rightharpoonup x$ und $x_n \rightharpoonup y$ für $x \neq y$, so würde für jede stetige Linearform $\lambda \in V'$ gelten, dass $\lambda(x) = \lambda(y)$. Man zeigt aber, dass es ein beschränktes $\lambda \in V'$ mit $\lambda(x) \neq \lambda(y)$ gibt (Satz von Hahn-Banach).

2. Wegen der Ungleichung $|\lambda(x_n - x)| \leq \|\lambda\| \|x_n - x\|$ für $\lambda \in V'$ sind konvergente Folgen insbesondere schwach konvergent mit gleichem Grenzwert.

3. Sei H ein Hilbertraum und (e_i) eine Hilbertbasis. Für eine Folge (ψ_n) in H betrachte die Folgen (ψ_n^i) der Fourierkoeffizienten $\psi_n^i = \langle e_i, \psi_n \rangle$. Dann gilt $\psi_n \rightharpoonup \psi$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} \psi_n^i = \langle e_i, \psi \rangle$ für alle i gilt und wenn die Folge $\|\psi_n\|$ beschränkt ist.

   [Denn gilt $\psi_n \rightharpoonup \psi$, so folgt die erste Eigenschaft aus der Definition von schwacher Konvergenz angewandt auf die Linearform $\langle e_i, - \rangle$ und die zweite nach Punkt 1. Umgekehrt sei $F = \mathrm{span}(e_i)$ und $\varphi \in F$. Dann folgt aus der ersten Eigenschaft $\langle \varphi, \psi_n \rangle \to \langle \varphi, \psi \rangle$ für alle $\varphi \in F$. Da F dicht in H liegt, finde für beliebiges $\varphi \in H$ eine Folge (φ_l) mit $\varphi_l \in F$, die stark gegen ein vorgegebenes $\varphi \in H$ konvergiert. Wir schätzen dann ab:

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, \psi_n \rangle - \langle \varphi, \psi \rangle| &\leq |\langle \varphi - \varphi_l, \psi_n \rangle| + |\langle \varphi_l, \psi_n - \psi \rangle| + |\langle \varphi_l - \varphi, \psi \rangle| \\ &\leq (c + \|\psi\|) \cdot \|\varphi_l - \varphi\| + |\langle \varphi_l, \psi_n - \psi \rangle|. \end{aligned}$$

   Für $\epsilon > 0$ wähle ein l, das so groß ist, dass $\|\varphi_l - \varphi\| < \epsilon$ gilt. Dann gibt es ein N_0, so dass für alle $n \geq N_0$ folgt $|\langle \varphi_l, \psi_n - \psi \rangle| < \epsilon$. Dies zeigt die schwache Konvergenz $\psi_n \rightharpoonup \psi$.]

4. Insbesondere besitzt jede beschränkte Folge in einem Hilbertraum eine schwach konvergente Teilfolge.

2.3 Resolvente und Spektrum

Wir machen zunächst einige Bemerkungen zu Eigenwertproblemen in Banach- und Hilberträumen.

Bemerkungen 2.3.1.

1. Wir erinnern uns an die Bestimmung von Eigenwerten: Ist V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $F : V \to V$ eine lineare Abbildung, so gibt es für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ genau zwei Möglichkeiten:

   - Die Abbildung $F - \lambda \mathrm{id}_V$ ist nicht injektiv. Dann ist $\ker(F - \lambda \mathrm{id}_V) \neq \{0\}$; von Null verschiedene Elemente des Kerns heißen *Eigenvektoren*; λ heißt dann ein *Eigenwert* von F.
   - Die Abbildung $F - \lambda \mathrm{id}_V$ ist injektiv. Dann ist λ kein Eigenwert von f. Nach der Dimensionsformel ist $F - \lambda \mathrm{id}_V$ in diesem Fall auch surjektiv, und es gibt eine Umkehrfunktion $(F - \lambda \mathrm{id}_V)^{-1} \in L(V)$.

2. Die Dimensionsformel können wir im Fall eines unendlich-dimensionalen Vektorraums V nicht anwenden. Es kann sein, dass ein λ zwar kein Eigenwert von F ist, also $(F - \lambda \mathrm{id}_V)$ injektiv ist, aber dennoch $(F - \lambda \mathrm{id}_V)$ nicht surjektiv ist.

   Betrachte etwa $V = L^2(U)$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei f eine beschränkte (und stetige) Funktion $f \in C(U)$. Dann ist der Multiplikationsoperator $F\colon \varphi \mapsto f \cdot \varphi$ ein stetiger linearer Operator mit der Operatornorm $\|f\|_\infty$. Ist die Funktion f nirgends lokal konstant, so hat dieser Multiplikationsoperator keine Eigenvektoren. Hat die Funktion f eine Nullstelle, so ist der Multiplikationsoperator nicht surjektiv.

Definition 2.3.2
Sei B ein komplexer Banachraum und $D(T)$ ein dichter Unterraum. (Wir lassen natürlich auch $D(T) = B$ zu.) Sei $T\colon D(T) \to B$ eine $\mathbb{C}-$lineare Abbildung.

1. *Dann heißt*

   $$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, T - \lambda id_{D(T)} : D(T) \to B \text{ bijektiv}, (T - \lambda id_{D(T)})^{-1} \in L(B)\}$$

   die Resolventenmenge *von T. Für jedes $\lambda \in \rho(T)$ heißt die Umkehrabbildung*

   $$R_\lambda(T) := (\lambda id_{D(T)} - T)^{-1}$$

   die Resolvente *von T zu λ.*

2. *Das Komplement $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ der Resolventenmenge heißt das* Spektrum *des Operators T. (Wir werden später in Bemerkung 2.6.8 die Definition von Resolventenmenge und Spektrum in bestimmten Fällen noch etwas modifizieren.)*

   Man nennt

   $$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \ker(T - \lambda id_{D(T)}) \neq \{0\}\}$$

   das Punktspektrum *von T. Wir setzen noch $\sigma_c(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$.*

Bemerkungen 2.3.3. Sei B ein Banachraum und $T\colon B \to B$ linear und stetig,

1. Es existiere für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Umkehrabbildung $(T - \lambda \mathrm{id}_B)^{-1}\colon B \to B$. In dem Fall folgt schon nach dem Korollar 2.2.21 aus dem Satz von der offenen Abbildung, dass dann die lineare Abbildung $(T - \lambda \mathrm{id}_B)^{-1}$ stetig ist, also Element von $L(B)$ ist (und die Abbildung $(T - \lambda \mathrm{id}_B)$ offen). Somit ist dann
$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, T - \lambda \mathrm{id}_B : B \to B \text{ bijektiv}\}.$$

2. Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ kein Eigenwert von T, aber $\lambda \in \sigma(T)$. Wir nehmen jetzt an, dass der Operator $(T - \lambda \mathrm{id}_B)^{-1}\colon D((T - \lambda \mathrm{id}_B)^{-1} = \mathrm{im}(T - \lambda \mathrm{id}_B) \to B$ unbeschränkt ist. Es existiert dann eine Folge von Vektoren $\phi_n \in D((T - \lambda \mathrm{id}_B)^{-1})$ mit
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\phi_n\|}{\|(T - \lambda \mathrm{id}_B)^{-1}\phi_n\|} = 0.$$
Definiert man $\psi_n := (T - \lambda \mathrm{id}_B)^{-1}\phi_n$, so folgt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|(T - \lambda \mathrm{id}_B)\psi_n\|}{\|\psi_n\|} = 0. \tag{8}$$
Würde die Folge der Vektoren ψ_n gegen ein Element $\psi \in B$ konvergieren, dann ist der Grenzwert ein Element in $\ker(T - \lambda \mathrm{id}_{D(T)})$, d.h. ein Eigenvektor zu $\lambda \in \sigma_p(T)$. Wir sehen, dass neben der Möglichkeit, Eigenwert zu sein, immerhin noch die Möglichkeit existiert, dass der Fehler, den man macht, wenn man $T\psi_n$ durch $\lambda\psi_n$ approximiert, für genügend großes n im Vergleich zu der Länge von ψ_n beliebig klein wird. Wir sprechen dann von einem *verallgemeinerten Eigenwert* λ von T.

   Zum Beispiel ist der Multiplikationsoperator $\hat{x}$ auf $H = L^2([0,1])$ beschränkt, und sein Spektrum ist gegeben durch $\sigma(\hat{x}) = [0,1]$:

   Es ist $\|\hat{x}\psi\| \le \|\psi\|$ und $\langle\phi, \hat{x}\psi\rangle = \langle\hat{x}\phi, \psi\rangle$ für alle $\phi, \psi \in H$, und wir werden sehen, dass dann $\sigma(\hat{x})$ nur eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein kann. Für gegebenes $\lambda \in (0,1)$ kann man die Funktionen $\psi_n := \sqrt{n}\,\mathbf{1}_{[\lambda - \frac{1}{2n}, \lambda + \frac{1}{2n}]}$ betrachten (mit n groß genug). Es gilt
$$\|(\hat{x} - \lambda \mathrm{id}_H)\psi_n\|^2 = \int_0^1 |(x-\lambda)\psi(x)|^2 dx = n\int_{\lambda-\frac{1}{2n}}^{\lambda+\frac{1}{2n}} (x-\lambda)^2 dx = \frac{n}{3}(x-\lambda)^3\Big|_{\lambda-\frac{1}{2n}}^{\lambda+\frac{1}{2n}} = \frac{2n}{3(2n)^3},$$
sowie $\|\psi_n\|^2 = 1$. Die Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt also (8), man kann aber leicht prüfen, dass die Folge (der trivialen Fortsetzungen) in $L^2(\mathbb{R})$ nicht konvergiert. Es folgt, dass $(0,1) \subseteq \sigma(\hat{x})$ und somit (aufgrund der Abgeschlossenheit) auch $[0,1] \subseteq \sigma(\hat{x})$ gilt.

   Falls $\lambda \notin [0,1]$, dann ist die Funktion $1/(x-\lambda)$ beschränkt im Intervall $[0,1]$. Es folgt, dass der inverse Operator zu $\hat{x} - \lambda \mathrm{id}_H$, dargestellt als Multiplikation mit der Funktion $1/(x-\lambda)$, beschränkt ist. Also ist $\lambda \notin \sigma(\hat{x})$.

3. Man überlegt sich leicht, dass ein orthogonaler Projektor $0 \ne p \ne \mathrm{id}$ das Spektrum $\sigma(p) = \sigma_p(p) = \{0,1\}$ hat.

Betrachtung 2.3.4.
Sei B ein Banachraum und $T\colon B \to B$ linear. Sei $\rho(T)$ die Resolventenmenge und $\lambda_0 \in \rho(T)$.
Die formale Rechnung

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda - T} &= \frac{1}{\lambda - \lambda_0 + (\lambda_0 - T)} = \frac{1}{\lambda_0 - T}\frac{1}{1 - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - T}} \\ &= \frac{1}{\lambda_0 - T}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - T}\right)^n\right]\end{aligned}$$

legt es nahe, für die Resolvente den Potenzreihenansatz

$$R_\lambda(T) = R_{\lambda_0}(T)\left(\mathrm{id}_B + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^n \left(R_{\lambda_0}(T)\right)^n\right)$$

zu machen. Wegen $\|(R_{\lambda_0}(T))^n\| \leq \|R_{\lambda_0}(T)\|^n$ konvergiert die Reihe für $|\lambda - \lambda_0| < \|(R_{\lambda_0}(T))\|^{-1}$. Man zeigt in diesem Fall, dass sie in der Tat ein Inverses zu $(\lambda \mathrm{id} - T)$ gibt. Ist also $|\lambda - \lambda_0|$ genügend klein, so ist $\lambda \in \rho(T)$. Es folgt:

Die Resolventenmenge $\rho(T)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, und $R_{-}(T)\colon \rho(T) \to L(B)$ ist eine analytische $L(B)$-wertige Funktion.

Weiterhin gilt: Für je zwei Werte $\lambda, \mu \in \rho(T)$ kommutieren die Resolventen $R_\lambda(T)$ und $R_\mu(T)$; genauer: Es gilt die *Resolventenformel*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T).$$

Dies ergibt sich aus der Rechnung

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = R_\lambda(T)(\mu \mathrm{id} - T)R_\mu(T) - R_\lambda(T)(\lambda \mathrm{id} - T)R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T).$$

Korollar 2.3.5.
Sei B ein komplexer Banachraum und $T \in L(B)$ ein beschränkter Operator.
Dann ist das Spektrum $\sigma(T)$ nicht leer. Ferner gilt $\sigma(T) \subseteq \overline{B_{\|T\|}(0)} \subseteq \mathbb{C}$.

Beweis.

- Die formale Rechnung

$$\frac{1}{\lambda - T} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 - T/\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right)$$

  legt die *Neumann-Reihe*

$$\frac{1}{\lambda}(\mathrm{id}_B + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{T}{\lambda})^n)$$

  als Ansatz für die Resolvente nahe. Diese Reihe konvergiert für $|\lambda| > \|T\|$ und gibt für diese Werte von λ eine Resolvente $R_\lambda(T)$.

- Es gilt überdies $\lim_{|\lambda| \to \infty} \|R_\lambda(T)\| = 0$. Wäre nun $\sigma(T)$ die leere Menge, so wäre $R_{-}(T)\colon \rho(T) = \mathbb{C} \to L(B)$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ analytische, beschränkte Funktion mit Werten im Banachraum $L(B)$ und nach dem Satz von Liouville 1.3.16 überall gleich Null. Dies kann aber nicht gelten.

□

Satz 2.3.6.
Sei T ein beschränkter Operator auf einem Banachraum B. Man nennt

$$r(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

den *Spektralradius* von T. Es ist

$$r(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n};$$

ist B sogar ein Hilbertraum H und ist A symmetrischer Operator $H \to H$, so gilt $r(A) = \|A\|$.

Beweis.

- Wir fassen die Neumann-Reihe als (Laurent-)Reihe in der Variablen $\frac{1}{\lambda}$ auf. Für diese kann man mit der Formel von Cauchy-Hadamard 0.1.4 ihren Konvergenzradius $\tilde{r}$ bestimmen zu
$$\tilde{r} = \left(\limsup_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n} \right)^{-1}.$$
Man zeigt dann noch mit einem weiteren Argument [RS, VI, Problem 11], dass die Folge $\|T^n\|^{1/n}$ sogar konvergiert.

- Wir wollen zeigen, dass der Spektralradius $r(T)$ gleich $\tilde{r}^{-1}$ ist; dann ist die Behauptung gezeigt. Wir haben in Betrachtung 2.3.4 gesehen, dass die Resolvente $R_-(T)$ eine analytische Funktion auf der Resolventenmenge $\rho(T)$ ist, und in Korollar 2.3.5, dass alle z mit $|z| > r(T)$ in der Resolventenmenge liegen. Die Neumann-Reihe muss also für $|\lambda| > r(T)$ bzw. $\frac{1}{|\lambda|} < r(T)^{-1}$ konvergieren. Also muss für den Konvergenzradius der Neumann-Reihe gelten $\tilde{r} \geq r(T)^{-1}$.
Andererseits haben wir gesehen, dass dort, wo die Neumann-Reihe konvergiert, die Resolvente existiert. Dies ist wie bei jeder Potenzreihe der Fall für alle $\frac{1}{|\lambda|} < \tilde{r}$, also für alle $|\lambda| > \tilde{r}^{-1}$. Wäre nun $\tilde{r} > r(T)^{-1}$, so würde die Neumann-Reihe auch für alle λ mit $\tilde{r}^{-1} < |\lambda| \leq r(T)$ konvergieren und eine Resolvente liefern. Dies steht im Widerspruch zur Definition des Spektralradius $r(T)$. Daher muss der Konvergenzradius $\tilde{r} = r(T)^{-1}$ sein.

- Ist $B = H$ ein Hilbertraum und A selbstadjungiert, so gilt $\|A^2\| = \|A^* A\| = \|A\|^2$ (nach Korollar 2.2.14). Daraus folgt $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$ und somit durch Übergang zu einer Teilfolge
$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \|A^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|A\|.$$
□

2.4 Kompakte Operatoren

Wir beschäftigen uns mit einer Klasse von Operatoren, deren Eigenschaften recht nah an denen linearer Abbildungen endlich-dimensionaler Vektorräume sind: den kompakten Operatoren. Sie haben wichtige Anwendungen in der Theorie partieller Differentialgleichungen und in der Quantenmechanik, die wir aber erst verstehen können, wenn wir etwas mehr über diese Operatoren wissen.

Definition 2.4.1
Seien V und W komplexe Banachräume. Eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt kompakte Abbildung, *wenn für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in W eine konvergente Teilfolge besitzt.*

Satz 2.4.2.
Seien V und W komplexe Banachräume.

1. Eine kompakte Abbildung $T\colon V \to W$ bildet schwach konvergente Folgen auf konvergente Folgen ab.

2. Jede kompakte Abbildung $T\colon V \to W$ ist stetig.

Beweis.
Die zweite Aussage ist ein Spezialfall der ersten Aussage, da konvergente Folgen insbesondere schwach konvergent sind, siehe Bem. 2.2.24.2. Man überlegt sich zunächst aber auch direkt, dass für einen unbeschränkten Operator $f\colon V \to W$ beschränkte Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V existieren müssen, deren Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge hat.

Sei nun T kompakt. Es gelte $x_n \rightharpoonup x$. Setze $y_n := Tx_n$. Dann gilt für jedes $\lambda \in W'$

$$\lambda(y_n) - \lambda(y) = (T'\lambda)(x_n - x),$$

wobei die Linearform $T'\lambda$ definiert ist durch $(T'\lambda)(x) = \lambda(Tx)$; wie oben überlegt man sich, dass die Linearform $T'\lambda$ nicht unbeschränkt sein kann. Es folgt $y_n \rightharpoonup y$ mit $y = Tx \in W$. Wäre die Folge (y_n) nicht auch normkonvergent gegen y, so gäbe es eine Teilfolge mit $\|y_{n_k} - y\| \geq \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$. Da aber die Folge x_{n_k} als schwach konvergente Folge nach Bem. 2.2.24.1 beschränkt ist und T kompakt ist, hat die Teilfolge y_{n_k} ihrerseits eine konvergente Teilfolge mit einem Grenzwert $\tilde{y} \neq y$. Diese Teilfolge muss dann auch schwach gegen $\tilde{y}$ konvergieren, im Widerspruch zur schwachen Konvergenz gegen y. Also gilt $y_n \to y$.

□

Definition 2.4.3
Sei B ein komplexer Banachraum. Ein beschränkter Operator $T \in L(B)$ mit Wertebereich $R = \operatorname{im} T$ heißt von endlichem Rang, *wenn $\dim_{\mathbb{C}} R < \infty$ gilt.*

Bemerkungen 2.4.4.

1. Schwach konvergente Folgen sind beschränkt; beschränkte Operatoren sind stetig und bilden die schwach-konvergente Folge auf eine beschränkte Folge ab. Ist der Wertebereich endlich-dimensional, so hat die Folge eine konvergente Teilfolge. Also sind Operatoren von endlichem Rang kompakte Operatoren.

   Insbesondere sind alle linearen Abbildungen in einen endlich-dimensionalen Banachraum kompakt.

2. Im Fall eines unendlich-dimensionalen Banachraums gibt es stetige Operatoren, die nicht kompakt sind.

   Wir betrachten den Fall eines (separablen) Hilbertraums H mit Hilbertbasis (e_n), und darin die Folge, die durch die Hilbertbasis (e_n) gegeben ist. Alle Folgenglieder liegen in der Einheitskugel von H.

   Es gilt $\|e_i - e_j\|^2 = 2$ für $i \neq j$, also konvergiert die Folge nicht (stark). Insbesondere ist die Einheitskugel (im unendlich-dimensionalen Fall) nicht mehr kompakt.

   Andererseits gibt es nach dem Rieszschen Darstellungssatz 2.1.5 für jede stetige Linearform $\lambda \in H'$ einen Vektor $v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n e_n \in H$ mit $\lambda(\cdot) = \langle v, \cdot \rangle$. Es ist dann

   $$\lambda(e_n) = \langle v, e_n \rangle = \overline{v}_n \to 0,$$

   so dass $e_n \rightharpoonup 0$ gilt. Man sagt: Die Einheitskugel ist immerhin noch *schwach kompakt*.

   Nun ist die Identität $\mathrm{id}_H \colon H \to H$ sicher stetig mit Norm 1, bildet aber die schwach konvergente Folge $e_n \rightharpoonup 0$ auf eine Folge ab, die wegen $\|e_i - e_j\|^2 = 2$ keine konvergente Teilfolge hat.

3. Man kann allgemeiner zeigen, dass genau dann alle beschränkten Operatoren auf einem komplexen Banachraum V kompakt sind, wenn V endlich-dimensional ist.

Satz 2.4.5.
Seien V, W komplexe Banachräume und $L(V, W)$ der Banachraum der beschränkten linearen Abbildungen mit der Operatornorm $\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$.

1. Gilt $T_n \to T$ bzgl. der Operatornorm und sind alle Operatoren T_n kompakt, so ist auch T kompakt. Die kompakten linearen Abbildungen bilden also einen *abgeschlossenen* Untervektorraum des Banachraums $L(V, W)$.

2. Sei Z ein weiterer Banachraum und $S \in L(W, Z)$ und $T \in L(V, W)$. Ist S oder T kompakt, dann ist $S \circ T$ kompakt.

   Ist insbesondere $Z = V = W$, so besagt dies (per Definition), dass der Unterraum der kompakten Operatoren $T \colon W \to W$ ein sogenanntes beidseitiges *Ideal* der Banachalgebra $L(W)$ bildet.

Beweis.
Übg
[

0. Wir zeigen zunächst, dass kompakte Operatoren einen Untervektorraum bilden. Seien T, S kompakt und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Sei $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine beliebige beschränkte Folge in V; finde eine Teilfolge $(x_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$, so dass die Folge $(S(x_{j_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ in W konvergiert. Finde davon wiederum eine Teilfolge $(x_{j_{k_n}})_{n \in \mathbb{N}}$, so dass auch die Folge $(T(x_{j_{k_n}}))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Dann konvergiert auch die Folge $(\lambda S(x_{j_{k_n}}) + \mu T(x_{j_{k_n}}))_{n \in \mathbb{N}}$. Also ist auch die Linearkombination $\lambda S + \mu T$ ein kompakter Operator.

1. Sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in $L(V, W)$ konvergente Folge kompakter linearer Abbildungen. Sei $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine beliebige beschränkte Folge in V, also $\|x_j\| \leq c$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{1j})_{j \in \mathbb{N}}$ der Folge $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$, so dass $(T_1(x_{1j}))_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert; von dieser Teilfolge finde wiederum eine Teilfolge $(x_{2j})_{j \in \mathbb{N}}$, so dass auch $(T_2(x_{2j}))_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Induktiv finde eine Teilfolge $(x_{n+1,j})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(x_{nj})_{j \in \mathbb{N}}$, so dass $(T_{n+1}(x_{n+1,j}))_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Betrachte die Folge der Diagonalglieder $y_j := x_{jj}$; offenbar konvergiert $T_n(y_j)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Für gegebenes $\epsilon > 0$ gibt es wegen der Normkonvergenz ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $\|T_n - T\| < \epsilon$ gilt. Finde dann $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $l, k > k_0$

$$\|T_{n_0}(y_l) - T_{n_0}(y_k)\| < \varepsilon$$

gilt. Für diese l, k gilt dann die Abschätzung

$$\|T(y_l) - T(y_k)\| \leq \|T(y_l) - T_{n_0}(y_l)\| + \|T_{n_0}(y_l) - T_{n_0}(y_k)\| + \|T_{n_0}(y_k) - T(y_k)\|$$

$$< \varepsilon\|y_l\| + \varepsilon + \varepsilon\|y_k\| \leq (2c+1)\varepsilon.$$

Also ist $(T(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Banachraum W und damit eine konvergente Teilfolge von $(T(x_j))_{j\in\mathbb{N}}$.

2. Sei $\big(x_n\big)$ eine beschränkte Folge in V. Da T stetig ist, ist dann $\big(T(x_n)\big)$ beschränkt in W. Falls S kompakt ist, besitzt $\big(S(T(x_n))\big)$ eine konvergente Teilfolge, also ist ST nach Definition kompakt. Falls T kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $\big(T(x_{n_k})\big)$. Dann konvergiert die Folge $\big(S(T(x_{n_k}))\big)$ wegen der Stetigkeit von S.

] □

Wir betrachten nun wieder kompakte Operatoren auf Hilberträumen.

Lemma 2.4.6.
Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ ein Operator von endlichem Rang. Dann gibt es endliche linear unabhängige Familien $(e_j)_{j=1,\dots,k}$ und $(e_j^*)_{j=1,\dots,k}$ in H mit $k = \dim \operatorname{im}(T)$, so dass

$$T(x) = \sum_{j=1}^{k} \langle e_j^*, x\rangle e_j \text{ für alle } x \in H.$$

Der adjungierte Operator T^* ist ebenfalls von endlichem Rang. Es gilt $\dim \operatorname{im}(T^*) = k$ und

$$T^*(x) = \sum_{j=1}^{k} \langle e_j, x\rangle e_j^*.$$

Beweis.

1. Dies beweist man durch einfache Rechnungen. Sei $(e_j)_{j=1,\dots,k}$ eine beliebige Orthonormalbasis des Bildes $R = \operatorname{im} T$. Entwickle für $x \in H$

$$T(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(x) e_j,$$

wobei

$$\alpha_l(x) = \langle e_l, T(x)\rangle = \langle T^* e_l, x\rangle.$$

Wir setzen $e_l^* := T^* e_l$ und haben

$$T(x) = \sum_{j=1}^{k} \langle e_l^*, x\rangle e_j,$$

2. Für beliebige $x, y \in H$ gilt

$$\langle y, T(x)\rangle = \sum_{j=1}^{k} \langle e_j^*, x\rangle \langle y, e_j\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{k} \langle e_j, y\rangle e_j^*, x \right\rangle .$$

Der Vergleich mit der definierenden Gleichung $\langle y, T(x)\rangle = \langle T^*(y), x\rangle$ liefert die Darstellung

$$T^*(y) = \sum_{j=1}^{k} \langle e_j, y\rangle e_j^* .$$

des adjungierten Operators T^*. Also ist auch T^* von endlichem Rang und die Familie $(e_j^*)_{j=1,\dots,k}$ ist ein Erzeugendensystem des Bildes $\mathrm{im}(T^*)$; es folgt $\dim \mathrm{im}(T^*) \leq \dim \mathrm{im}(T)$. Aus $(T^*)^* = T$, vgl. Satz 2.2.9, folgt auch die umgekehrte Ungleichung

$$\dim \mathrm{im}(T) = \dim \mathrm{im}((T^*)^*) \leq \dim \mathrm{im}(T^*).$$

□

Satz 2.4.7.
Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$.

1. Der Operator T ist genau dann kompakt, wenn es eine Folge $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Operatoren von endlichem Rang gibt mit $\lim_{j\to\infty} \|T - T_j\| = 0$.

2. Ein Operator T ist genau dann kompakt, wenn der adjungierte Operator T^* kompakt ist.

Beweis.

1. Da Operatoren von endlichem Rang nach Bem. 2.4.4.1 kompakt sind, folgt aus Satz 2.4.5 sofort, dass Operatoren im Normabschluss des Unterraums von Operatoren endlichen Ranges kompakt sind.

2. Sei nun umgekehrt T kompakt. Wir müssen T durch Operatoren endlichen Rangs approximieren. Wähle eine Hilbertbasis (e_j) von H und setze

$$\lambda_n := \sup_{\|\psi\|=1, \psi \in \mathrm{span}(e_0, \dots e_n)^\perp} \|T\psi\|;$$

dies ist eine monoton fallende Folge mit $\lambda_n \geq 0$, die also gegen einen Grenzwert $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ konvergiert.

Wähle nun eine Folge $\psi_n \in \mathrm{span}(e_0, \dots e_n)^\perp$ mit $\|\psi_n\| = 1$ und $\|T\psi_n\| \geq \lambda/2$. Aus $\psi_n \rightharpoonup 0$ folgt wegen Satz 2.4.2.1, dass $T\psi_n \to 0$. Also ist $\lambda = 0$. Für $x \in H$ gilt nun

$$\underbrace{\| \, T(x) - \sum_{j=0}^{n} \langle e_j, x\rangle T(e_j) \, \|}_{T\psi \text{ mit } \psi \in \mathrm{span}(e_0, \dots e_n)^\perp} \leq \lambda_n \|x\|,$$

so dass die Operatoren endlichen Rangs $\sum_{j=0}^{n} \langle e_j, -\rangle T(e_j)$ gegen den kompakten Operator T konvergieren.

3. Sei T kompakt. Dann gibt es nach 2. eine Folge von Operatoren T_n von endlichem Rang, die gegen T konvergieren. Nach Lemma 2.4.6 sind die adjungierten Operatoren T_n^* auch von endlichem Rang; ferner gilt nach Satz 2.2.9

$$\|T^* - T_n^*\| = \|T - T_n\|,$$

also auch $\lim_{n\to\infty} T_n^* = T^*$. Nach Satz 2.4.5 ist T^* als Grenzwert von Operatoren endlichen Rangs kompakt. Ist umgekehrt T^* kompakt, so folgt mit gleichem Schluss, dass $T = (T^*)^*$ kompakt ist.

□

Um kompakte Operatoren anwenden zu können, betrachten wir noch:

Satz 2.4.8 (Analytisches Fredholm-Theorem)**.**
Sei H ein Hilbertraum. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Sei $f\colon D \to L(H)$ eine analytische operatorwertige Funktion, so dass $f(z)$ für alle $z \in D$ ein kompakter Operator ist. Dann gilt die folgende Alternative: Entweder gilt

- Der Operator $(\mathrm{id}_H - f(z))^{-1}$ existiert in $L(H)$ für *kein* $z \in D$.

oder es gilt

- Der Operator $(\mathrm{id}_H - f(z))^{-1}$ existiert in $L(H)$ für alle $z \in D \setminus S$, wo bei S eine diskrete Untermenge von D ist, d.h. keinen Häufungspunkt in D besitzt. Dann ist $(\mathrm{id}_H - f(z))^{-1}$ analytisch auf $D \setminus S$ und hat Pole als Singularitäten in S. Die Residuen an den Polen sind Operatoren von endlichem Rang. Für $z \in S$ hat die Eigenvektorgleichung $f(z)\psi = \psi$ eine von Null verschiedene Lösung in H.

Beweis.

[Es geht entscheidend das Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen 1.1.19 für analytische Funktionen ein.

Wir zeigen, dass in der Umgebung jedes Punktes $z_0 \in D$ eine der beiden Aussagen gilt. Da D zusammenhängend ist, folgt dann die Behauptung.

- Wähle $r > 0$, so dass aus $|z - z_0| < r$ folgt $\|f(z) - f(z_0)\| < \frac{1}{2}$. Da $f(z_0)$ ein kompakter Operator ist, finde mit Satz 2.4.7 einen Operator endlichen Rangs F, so dass $\|f(z_0) - F\| < \frac{1}{2}$ gilt. Dann ist für $z \in B_r(z_0)$ nach der Dreiecksungleichung $\|f(z) - F\| < 1$. Daher existiert für $z \in B_r(z_0)$ die Abbildung

$$(\mathrm{id}_H - f(z) + F)^{-1} = \mathrm{id}_H + \sum_{n=1}^{\infty} (f(z) - F)^n$$

und ist in z analytisch. Da F endlichen Rang hat, finden wir nach Lemma 2.4.6 linear unabhängige Vektoren $(\psi_i)_{i=1,\ldots,N}$ und Vektoren $(\phi_i)_{i=1,\ldots,N}$, so dass

$$F(v) = \sum_{n=1}^{N} \langle \phi_n, v\rangle \psi_n \quad \text{für alle } v \in H.$$

- Führe nun für $z \in B_r(z_0)$ die Familie von Vektoren

  $$\phi_n(z) := (\mathrm{id}_H - f(z) + F)^{-1*}\phi_n \in H$$

  und die Familie von Abbildungen

  $$\begin{array}{rcl} g(z) & := & F \circ (\mathrm{id}_H - f(z) + F)^{-1} = \sum_{n=1}^N \langle \phi_n, (\mathrm{id}_H - f(z) + F)^{-1} - \rangle \psi_n \\ & = & \sum_{n=1}^N \langle \phi_n(z), - \rangle \psi_n \end{array} .$$

  ein. Die Gleichung

  $$(\mathrm{id}_H - f(z)) = (\mathrm{id}_H - g(z)) \circ (\mathrm{id}_H - f(z) + F)$$

  zeigt, dass $(\mathrm{id}_H - f(z))$ für $z \in B_r(z_0)$ genau dann invertierbar ist, wenn $\mathrm{id}_H - g(z)$ invertierbar ist, und dass die Eigenvektorgleichung $\psi = f(z)\psi$ genau dann eine Lösung $\psi \neq 0$ hat, wenn die Gleichung $\varphi = g(z)\varphi$ eine Lösung $\varphi \neq 0$ hat. Somit reicht es aus, alle Aussagen für die Familie $g(z)$ von Abbildungen endlichen Rangs zu zeigen.

- Entwickle eine Lösung φ von $g(z)\varphi = \varphi$ in Komponenten, $\varphi = \sum_{n=1}^N \beta_n \psi_n$ mit $\beta_n \in \mathbb{C}$. Dann ist φ genau dann Lösung, wenn die komplexen Zahlen (β_n) eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems

  $$\beta_n = \sum_{m=1}^N \langle \phi_n(z), \psi_m \rangle \beta_m$$

  sind. Daher gibt es eine von Null verschiedene Lösung genau dann, wenn

  $$d(z) := \det(\delta_{m,n} - \langle \phi_n(z), \psi_m \rangle) = 0$$

  gilt. Da die Matrixelemente analytische Funktionen sind, ist auch die Funktion $d(z)$ analytisch. Nach dem Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen 1.1.19 ist die Nullstellenmenge S von $d(z)$ entweder ganz $B_r(z_0)$ oder eine diskrete Menge, entsprechend der Alternative. Verschwindet d auf ganz $B_r(z_0)$, so gibt es nirgendwo ein Inverses und wir sind im ersten Fall der Alternative. Im zweiten Fall betrachten wir den Unterfall, dass $z \notin S$, also z nicht in der Nullstellenmenge liegt; für gegebenes ψ können wir die Gleichung $(\mathrm{id} - g(z))\varphi = \psi$ durch den Ansatz

  $$\varphi = \psi + \sum_{n=1}^N \beta_n \psi_n$$

  lösen, wenn wir Lösungen (β_n) mit

  $$\beta_n = \langle \phi_n(z), \psi \rangle + \sum_{n=1}^N \langle \phi_n(z), \psi_m \rangle \beta_m .$$

  finden. Dieses inhomogene lineare Gleichungssystem hat wegen $d(z) \neq 0$ eine nicht-triviale Lösung. Also existiert $(\mathrm{id} - g(z))^{-1}$ und somit $(\mathrm{id} - f(z))^{-1}$ genau für $z \notin S$.

- Dass $(\mathrm{id} - f(z))^{-1}$ analytisch ist bis auf Pole in S und dort als Residuen Operatoren endlichen Rangs hat, folgt aus expliziten Formeln für die β_n.

] $\square$

Korollar 2.4.9 (Fredholmsche Alternative).
Sei A ein kompakter Operator auf H. Dann existiert entweder der inverse Operator $(\mathrm{id}_H - A)^{-1}$ in $L(H)$, oder die Eigenvektorgleichung $A\psi = \psi$ hat eine von Null verschiedene Lösung.

Beweis.
Betrachte die analytische Funktion $f(z) = zA$. Im analytischen Fredholmtheorem 2.4.8 kann die erste Alternative nicht zutreffen, da für $z = 0$ der Operator $\mathrm{id}_H - zA = \mathrm{id}_H$ invertierbar ist. In der zweiten Alternative gilt entweder $1 \in S$, dann ist die Eigenvektorgleichung lösbar, oder $1 \notin S$, dann existiert das Inverse $(\mathrm{id}_H - A)^{-1}$. □

Bemerkungen 2.4.10.

1. Eine wichtige Anwendung der Fredholmschen Alternative ist das Studium von Lösungsmengen von inhomogenen linearen Gleichungen der Form $(\mathrm{id}_H - A)\psi = \varphi$ mit gegebenem kompakten Operator A und für gegebenes $\varphi \in H$. Angenommen, wir wissen, dass für irgendein $\varphi \in H$ *höchstens* eine Lösung ψ_0 existieren kann. Dann kann die Eigenvektorgleichung $A\psi = \psi$ keine von Null verschiedene Lösung ψ haben (denn dann wäre mit ψ_0 auch $\psi_0 + \psi$ eine weitere Lösung). Nach der Fredholmschen Alternative 2.4.9 muss dann $(\mathrm{id} - A)^{-1}$ existieren. Also impliziert in diesem Fall Eindeutigkeit für eine Inhomogenität φ und Kompaktheit von A die eindeutige Lösbarkeit für alle φ und die stetige Abhängigkeit der Lösung von φ.

2. Sei Ω eine beschränkte offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Man kann zeigen, vgl. [RS, Theorem VI.22], dass der Operator $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ mit dem Integralkern k
$$(Kf)(x) := \int_\Omega k(x,y) f(y) \mathrm{d}^n y \text{ für } f \in L^2(\Omega)$$
kompakt ist.

3. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt mit glattem Rand ∂D. Wir suchen für eine vorgegebene stetige Funktion f auf ∂D eine Funktion $u \in C^2(D, \mathbb{R}) \cap C(\overline{D}, \mathbb{R})$ mit
$$\Delta u(x) = 0 \text{ für } x \in D \text{ und } u(x) = f(x) \text{ für } x \in \partial D.$$
Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieses elliptischen Randwertproblems (und die stetige Abhängigkeit von den Randwerten) lassen sich mit Hilfe obiger Theorie zeigen, indem man eine (kompakte!) Abbildung
$$\begin{aligned} T : C(\partial D) &\to C(\partial D) \\ (T\varphi)(x) &:= \int_{\partial D} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{2\pi |x - y|^3} \varphi(y) \mathrm{d}S(y) \end{aligned}$$
betrachtet (wobei n_y den äußeren Normalenvektor in $y \in \partial D$ bezeichnet).

Wir machen nun Aussagen über das Spektrum kompakter Operatoren:

Satz 2.4.11 (Riesz-Schauder).
Das Spektrum eines kompakten Operators A auf einem Hilbertraum H ist die höchstens abzählbare Menge der Eigenwerte, eventuell vereinigt mit $\{0\}$. Es ist 0 der einzige mögliche Häufungspunkt im Spektrum. Die Eigenräume der von Null verschiedenen Eigenwerte sind endlich-dimensional.

Beweis.
Betrachte die auf der ganzen komplexen Ebene definierte analytische Funktion $f(z) := zA$. Für $z = 0$ existiert $(\mathrm{id}_H - f(z))^{-1} = \mathrm{id}_H$; wir sind also in der zweiten Alternative von Satz 2.4.8. Daher ist die Menge

$$C := \{z \in \mathbb{C} | zA\psi = \psi \text{ hat eine Lösung } \}$$

diskret. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Genau dann, wenn $\frac{1}{\lambda}$ in C ist, ist λ Eigenwert von A.

Ist $\frac{1}{\lambda}$ nicht in der diskreten Menge C, so existiert der Operator

$$(\lambda \mathrm{id}_H - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(\mathrm{id}_H - \frac{1}{\lambda}A)^{-1}$$

und λ gehört zur Resolventenmenge $\rho(A)$. Somit ist $\sigma(A)$ die Menge der Eigenwerte, eventuell vereinigt mit $\{0\}$. Da C keinen Häufungspunkt besitzt, ist 0 der einzig mögliche Häufungspunkt der Inversen der Elemente von C. Die Tatsache, dass die Eigenräume zu Eigenwerten ungleich Null endlich-dimensional sind, folgt direkt aus der Kompaktheit von A. □

Wir können nun auch zeigen, dass sich kompakte selbstadjungierte Operatoren ganz ähnlich verhalten wie endlich-dimensionale selbstadjungierte Operatoren:

Satz 2.4.12 (Hilbert-Schmidt)**.**
Sei A ein selbstadjungierter kompakter Operator auf einem separablen Hilbertraum H. Dann gibt es eine Hilbertbasis (e_n) von H, so dass $Ae_n = \lambda_n e_n$ mit $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Beweis.

- Wähle für den Eigenraum zu jedem Eigenwert eine Orthonormalbasis. Da Eigenräume eines selbstadjungierten Operators zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal stehen, erhalten wir so eine orthonormale Familie (e_i) in H. Sei U der Abschluss des Erzeugnisses dieser Familie in H.

- Es gilt $A(U) \subseteq U$ und, da A selbstadjungiert ist, $A(U^\perp) \subseteq U^\perp$. Setze $\tilde{A} := A|_{U^\perp}$; auch $\tilde{A}$ ist selbstadjungiert und kompakt. Ferner gilt für das Spektrum $\sigma(\tilde{A}) \subseteq \sigma(A)$. Nach dem Satz von Riesz-Schauder 2.4.11 ist jedes $\lambda \in \sigma(\tilde{A}) \setminus \{0\}$ ein Eigenwert, daher existiert ein Eigenvektor von A zu diesem Eigenwert, der aber dann in U liegen muss. Also ist $r(\tilde{A}) = 0$ und wegen Bemerkung 2.3.6 gilt $\|\tilde{A}\| = 0$. Aber Vektoren im Kern sind Eigenvektoren und somit in U, also $U^\perp = \{0\}$.

- Die Folge (λ_n) ist beschränkt, vgl. Satz 2.4.2. Aus dem Satz 2.4.11 von Riesz-Schauder folgt nun die Aussage $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

□

Wir zeigen nun, wie sich Lemma 2.4.6 von Operatoren endlichen Rangs auf kompakte Operatoren verallgemeinert:

Korollar 2.4.13.
Sei T ein kompakter Operator auf H. Dann gibt es (nicht-notwendigerweise vollständige) orthonormale Familien $(e_n)_{n=1,\dots,N}$, $(e_n^*)_{n=1,\dots,N}$, mit $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, und positive reelle Zahlen $(\lambda_n)_{n=1,2\dots}$ mit $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, so dass

$$T = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle e_n^*, -\rangle e_n.$$

Die Summe kann endlich oder unendlich sein; im letzteren Fall konvergiert sie bzgl. der Operatornorm.

Beweis.
Übg.
[Weil T kompakt ist, ist nach Satz 2.4.7 auch T^* und nach Satz 2.4.5 auch der selbstadjungierte und positive Operator T^*T kompakt. Nach dem Satz 2.4.12 finde eine orthonormale Menge $(e_n)_{n=1,\dots N}$ so dass $T^*Te_n = \mu_n e_n$ gilt mit $\mu_n > 0$ und dass T^*T auf dem orthogonalen Komplement des Erzeugnisses der Familie verschwindet. Sei $\lambda_n := \sqrt{\mu_n}$ die positive Quadratwurzel. Setze $e_n^* := \frac{1}{\lambda_n} Te_n$. Dann gilt

$$\langle e_n^*, e_m^* \rangle = \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} \langle Te_n, Te_m \rangle = \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} \langle e_n, T^*Te_m \rangle = \frac{\mu_m}{\lambda_n \lambda_m} \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m},$$

so dass auch die Familie $(e_n^*)_{n=1\dots N}$ orthonormal ist. Damit ist wie in Lemma 2.4.6

$$Tv = \sum_{n=1}^{N} \langle T^* e_n^*, v \rangle e_n^* = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle e_n, v \rangle e_n^*,$$

wobei wir benutzt haben

$$T^* e_n^* = \lambda_n^{-1} T^*Te_n = \frac{\mu_n}{\lambda_n} e_n = \lambda_n e_n.$$

Man beachte: wenn $T = A$ selbstadjungiert und positiv ist, gilt $e_n^* = \frac{1}{\lambda_n} Ae_n = e_n$, und man erhält die Aussage von Satz 2.4.12 als Spezialfall.] □

Wir erinnern an den Begriff eines positiven Operators A aus Definition 2.2.16: dies sind Operatoren, für die gilt $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ für alle $x \in H$. Man zeigt dann zum Beispiel mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung der analytischen Funktion $\sqrt{1-z}$ für $|z| \leq 1$:

Satz 2.4.14.
Sei $A \in L(H)$ positiv. Dann gibt es einen eindeutigen positiven Operator $B \in L(H)$ mit $B^2 = A$. Der Operator B kommutiert mit jedem beschränkten Operator, der mit A kommutiert. Wir schreiben $B = \sqrt{A}$.

Bemerkungen 2.4.15.

1. Für jeden Operator $A \in L(H)$ ist der Operator A^*A positiv, denn es gilt $\langle A^*Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0$. Wir betrachten daher den positiven selbstadjungierten Operator

$$|A| := \sqrt{A^*A}.$$

   Ist A kompakt, so sind die Eigenwerte von $|A|$ die sogenannten singulären Werte λ_n in Satz 2.4.13.

2. Man beachte, dass im Allgemeinen *nicht* gilt $|AB| = |A| \circ |B|$ oder $|A| = |A^*|$.

3. Das Analogon zur Polarzerlegung komplexer Zahlen für beschränkte Operatoren als Produkt $A = U|A|$ mit U unitär und $|A|$ positiv ist etwas subtil: Man zeigt [RS, Theorem VI.10], dass jeder beschränkte Operator $A \in L(H)$ eindeutig in der Form $A = U|A|$ geschrieben werden kann, mit einer partiellen Isometrie U mit $\ker U = \ker A$. Ein Operator $U \in L(H)$ heißt *partielle Isometrie*, wenn die Restriktion von U auf den abgeschlossenen Unterraum $(\ker U)^\perp$ eine Isometrie ist.
   (Man betrachte zum Beispiel $A\colon \ell^2 \to \ell^2$ die Verschiebung nach rechts, wie in Beispiel 2.2.11, dann ist A^* die Verschiebung nach links, und $A^*A = \mathrm{id}_{\ell^2}$, also $|A| = \sqrt{A^*A} = \mathrm{id}$. In dem Fall ist also $A = U|A|$, mit $U = A$, wobei natürlich A und A^* nicht unitär sind.)

Bemerkungen 2.4.16.

1. Wir berichten noch über interessante Unterklassen der kompakten Operatoren. Dies ist von praktischer Bedeutung, da man oft leichter zeigt, dass ein konkret gegebener Operator in einer der Unterklassen liegt.

   Sei hierfür H ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis (e_i). Für einen positiven Operator $A \in L(H)$ definieren wir die Spur durch

   $$\mathrm{tr}(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, Ae_n \rangle \in [0, \infty].$$

   Sie ist unabhängig von der Orthonormalbasis, linear, invariant unter Konjugation mit einem unitären Operator U, d.h. $\mathrm{tr} UAU^{-1} = \mathrm{tr}(A)$, und monoton: aus $0 \leq A \leq B$ folgt $\mathrm{tr}(A) \leq \mathrm{tr}(B)$.

2. Ein Operator $A \in L(H)$ heißt Operator von *Spurklasse*, wenn $\mathrm{tr}|A| < \infty$ gilt. Wir bezeichnen die Menge der Spurklasseoperatoren in $L(H)$ mit $\mathcal{I}_1$.

3. Die Operatoren von Spurklasse bilden ein beidseitiges $*$-Ideal von $L(H)$: Sie sind ein Untervektorraum, aus $A \in \mathcal{I}_1$ und $B \in L(H)$ folgt $A \circ B \in \mathcal{I}_1$ und $B \circ A \in \mathcal{I}_1$, und mit A liegt auch A^* in $\mathcal{I}_1$.

4. Mit der Norm $\|A\|_1 := \mathrm{tr}|A|$ wird $\mathcal{I}_1$ zur Banachalgebra. Es gilt $\|A\| \leq \|A\|_1$. Spurklasse-Operatoren sind kompakte Operatoren. Ein kompakter Operator A ist Spurklasse genau dann, wenn für die positiven Zahlen λ_i aus Korollar 2.4.13 gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$.

5. Dichtematrizen oder statistische Matrizen in der Quantenmechanik sind selbstadjungierte positive Operatoren von Spurklasse mit Spur 1 und somit insbesondere kompakt. Die nicht-negativen Zahlen λ_i aus Korollar 2.4.12 mit $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$ haben dann die Interpretation klassischer Wahrscheinlichkeiten. Die Zerlegung in Eigenräume nach dem Satz 2.4.12 von Hilbert-Schmidt besagt, dass wir den gemischten Zustand als Superposition reiner Zustände schreiben können.

6. Man nennt einen Operator $T \in L(H)$ einen *Hilbert-Schmidt Operator*, wenn $\mathrm{tr} T^*T < \infty$ gilt. Wir erhalten ein weiteres $*$-Ideal $\mathcal{I}_2$ von $L(H)$, das mit der Struktur eines Hilberttraums versehen werden kann (mit $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr} A^*B$), siehe [RS]. Hilbert-Schmidt Operatoren sind kompakt. Ein kompakter Operator A ist Hilbert-Schmidt, genau dann wenn für die positiven Zahlen λ_i aus Korollar 2.4.13 gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$. Man kann nun für $1 \leq p < \infty$ analog zu den L^P-Räumen weitere Ideale $\mathcal{I}_p$ einführen, die *Schattenideale* mit Norm $\|A\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^p\right)^{1/p} < \infty$.

2.5 Die Spektralsätze für beschränkte symmetrische Operatoren

Sei A ein symmetrischer Operator auf einem endlich-dimensionalen Hilbertraum. Dann können wir A diagonalisieren. In einer Basis $(v_i)_{i=1,\dots,n}$ von Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_i \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ schreiben wir, wenn $p_i \in \mathrm{End}(H)$ der Projektor auf den Unterraum $\mathbb{C}v_i$ ist,

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i.$$

Sei jetzt H wieder ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum. In diesem Abschnitt betrachten wir die stetigen, d.h. beschränkten, symmetrischen Operatoren $H \to H$. Wir haben bereits gesehen, dass es wichtige Unterschiede zum endlichdimensionalen Fall gibt: Es kann z.B. verallgemeinerte Eigenwerte λ geben, zu denen es keine Eigenvektoren gibt. Die Menge der verallgemeinerten Eigenwerte kann kontinuierliche Komponenten haben, die Gesamtheit solcher Komponenten nennt man das kontinuierliche Spektrum. Das ist physikalisch sehr relevant. Zum Beispiel hat der Hamiltonoperator für das Wasserstoffatom ein Spektrum von gebundenen Zuständen mit diskreten Energie-Eigenwerten, aber darüber hinaus auch einen kontinuierlichen Teil des Spektrums.

Für Anwendungen in der Quantenmechanik ist es nicht ausreichend, beschränkte Operatoren zu betrachten. Später (im nächsten Abschnitt) betrachten wir auch unbeschränkte Operatoren (selbstadjungiert, im Zusammenhang mit der Forderung nach reellen Messwerten). Wir führen deshalb einige Begriffe gleich allgemeiner ein, bevor wir uns wieder auf stetige Operatoren konzentrieren.

Definition 2.5.1
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume. Dann ist der Vektorraum $X \times Y$ mit der Norm $\|(x,y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$ wieder ein Banachraum. Sei $f\colon D \to Y$ mit $D \subseteq X$ eine nicht notwendigerweise stetige lineare Abbildung.

1. *Der* Graph *der Abbildung f ist die Teilmenge*

   $$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) | x \in D\} \subseteq X \times Y.$$

   Für eine lineare Abbildung ist $\mathrm{Graph}(f)$ *ein Untervektorraum.*

2. *Eine lineare Abbildung f heißt* abgeschlossen, *falls* $\mathrm{Graph}(f)$ *ein abgeschlossener Unterraum des Produktraums $X \times Y$ ist.*

   Explizit bedeutet dies:
   (Ab) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, die gegen ein $x \in X$ konvergiert und für die die Folge der Bildwerte $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y \in Y$ konvergiert, gilt $x \in D$ und $f(x) = y$.

Wir hatten bereits in Definition 2.3.2 dicht definierte Operatoren zugelassen.

Definition 2.5.2
Sei H ein Hilbertraum und $D(f)$ ein dichter Unterraum von H, d.h. $\overline{D(f)} = H$. Eine lineare Abbildung $f\colon D(f) \to H$ heißt ein dicht definierter Operator *auf H. Wir setzen*

$$D^* := \{y \in H | \exists y^* \in H \text{ mit } \langle f(x), y\rangle = \langle x, y^*\rangle \text{ für alle } x \in D(f)\}.$$

Zu jedem $y \in D^*$ ist $y^* \in H$ mit

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, y^*\rangle \text{ für alle } x \in D(f)$$

eindeutig bestimmt. Wir betrachten den Operator $f^*\colon D^* \to H$ mit $f^*(y) := y^*$ und $D(f^*) := D^*$. Dann ist f^* ist linear und heißt der zu f adjungierte Operator.

Definition 2.5.3
Sei H ein Hilbertraum, $D(f) \subseteq H$ ein dichter Unterraum und $f\colon D(f) \to H$ linear.

1. *Dann heißt f* symmetrisch, *wenn gilt*

   (Sy) $\langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle$ *für alle $x, y \in D(f)$. (Dann gilt $D^* \supseteq D(f)$.)*

2. *Ein symmetrischer Operator f heißt* selbstadjungiert, *wenn gilt*

   (Se) $D(f) = D(f^*)$. *(Dann gilt $f^* = f$.)*

Satz 2.5.4.
Sei $f\colon D(f) \to H$ ein auf $D(f) \subseteq H$ dicht definierter Operator. Dann ist der zu f adjungierte Operator $f^*\colon D^* \to H$ abgeschlossen.

Insbesondere sind selbstadjungierte Operatoren abgeschlossen.

Beweis.
Sei (x_n) eine Folge in $D(f^*)$ mit $x_n \to x \in H$, die die Eigenschaft hat, dass auch ihre Bildwerte $f^*(x_n)$ gegen ein $y \in H$ konvergieren. Für jedes $z \in D(f)$ gilt

$$\langle f(z), x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f(z), x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z, f^*(x_n)\rangle = \langle z, y\rangle.$$

Also ist $x \in D^*$, und es gilt $f^*(x) = y$. □

Bemerkungen 2.5.5.
Wir werden später (siehe Satz 2.6.14) zeigen:

1. Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators ist stets reell.

Man zeigt (ÜA) mit Satz 2.2.20:

2. Sei $f\colon X \to Y$ eine nicht notwendigerweise stetige lineare Abbildung von Banachräumen. Dann ist f genau dann stetig, wenn f abgeschlossen ist.

3. Satz von Hellinger-Toeplitz: Sei H ein Hilbertraum und sei $f\colon H \to H$ eine symmetrische lineare Abbildung, von der wir nicht voraussetzen, dass sie stetig ist, aber dass sie überall definiert ist: $D(f) = H$. Dann ist f stetig.

Im Rest des Abschnitts sei stets H ein Hilbertraum, und wir betrachten nun wieder beschränkte Operatoren $f\colon D(f) = H \to H$. Das bedeutet insbesondere, dass alle symmetrischen Operatoren A selbstadjungiert sind.

Wir möchten den Spektralsatz, genauer: mehrere Varianten des Spektralsatzes, zeigen.

Der Spektralsatz erlaubt es uns insbesondere, große Klassen von Funktionen $f(A)$ eines selbstadjungierten Operators A zu definieren. Die Version, die wir als nächstes zeigen werden, startet direkt mit diesem Aspekt.

Theorem 2.5.6 (Spektralsatz - stetiger Funktionalkalkül).
Sei H Hilbertraum und A ein symmetrischer Operator in $L(H)$. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung

$$\Phi \colon C(\sigma(A)) \to L(H)$$

von den komplexwertigen stetigen Funktionen auf dem Spektrum $\sigma(A)$ in die beschränkten Operatoren mit den folgenden Eigenschaften:

1. Φ ist ein unitaler $*$-Algebra-Morphismus, d.h. Φ ist linear und es gilt

   $$\Phi(1) = \mathrm{id}_H, \Phi(f \cdot g) = \Phi(f)\Phi(g) \text{ und } \Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$$

   für alle $f, g \in C(\sigma(A))$.

2. Φ ist stetig: Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit $\|\Phi(f)\|_{L(H)} \leq C\|f\|_\infty$.

3. Für die Funktion $f(x) = x$ auf $\sigma(A)$ gilt $\Phi(f) = A$.

Φ hat die weiteren Eigenschaften:

4. Aus $A\psi = \lambda\psi$ mit $\psi \in H$ folgt $\Phi(f)\psi = f(\lambda)\psi$.

5. Das Spektrum von $\Phi(f)$ ist $\{f(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\}$.

6. Aus $f \geq 0$ folgt $\Phi(f) \geq 0$.

7. Die Eigenschaft 2. wird verschärft zu der Aussage $\|\Phi(f)\|_{L(H)} = \|f\|_\infty$.

Bemerkungen 2.5.7.
Wir schreiben auch $f(A)$ für $\Phi(f)$. Es ist klar, dass durch die Eigenschaften 1. und 3. die Abbildung Φ auf Polynomen festgelegt wird. (Im eingangs betracheten endlich-dimensionalen Fall erhalten wir für $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$ gerade $f(A) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i)p_i$).

Andererseits liegen Polynome im Raum der stetigen Funktionen auf der kompakten Menge $\sigma(A)$ bezüglich der Supremumsnorm dicht, wie der Weierstraßsche Approximationssatz besagt. (Man beweist ihn mit ähnlichen Methoden, mit denen in MfP II die gleichmäßige Approximation von stetigen periodischen Funktionen durch trigonometrische Polynome gezeigt wurde.)

Auch wenn $f(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > \|A\|$ ist, konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^\infty a_n A^n$ im Banachraum $L(H)$ absolut und ergibt einen Kandidaten für $\Phi(f)$. So kann man einen analytischen Funktionalkalkül für beschränkte Operatoren sogar auf Banachräumen entwickeln.

Satz 2.5.8 (Weierstraßscher Approximationssatz).
Sei $[a, b]$ ein kompaktes reelles Intervall und $f \in C([a, b])$. Dann gibt es eine Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ polynomialer Funktionen p_k, die auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Für den Beweis von Satz 2.5.6 benötigen wir:

Lemma 2.5.9.
Für $P(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$ setze $P(A) = \sum_{n=0}^N a_n A^n \in L(H)$. Dann ist das Spektrum

$$\sigma(P(A)) = \{P(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Beweis.

$\supseteq$ Sei $\lambda \in \sigma(A)$. Da λ trivialerweise eine Nullstelle des Polynoms $P(x) - P(\lambda)$ ist, schreiben wir

$$P(x) - P(\lambda) = (x - \lambda)Q(x)$$

mit einem Polynom $Q(x)$. Daher ist $P(A) - P(\lambda)\mathrm{id}_H = (A - \lambda\mathrm{id}_H)Q(A)$. Da $A - \lambda\mathrm{id}_H$ kein beschränktes Inverses hat, hat auch $P(A) - P(\lambda)\mathrm{id}_H$ kein beschränktes Inverses, also ist $P(\lambda) \in \sigma(P(A))$.

$\subseteq$ Sei umgekehrt $\mu \in \sigma(P(A))$. Zerlege in Linearfaktoren

$$P(x) - \mu = a(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_N).$$

Angenommen, keine der Nullstellen λ_i wäre in $\sigma(A)$. Dann gäbe es den beschränkten Operator

$$(P(A) - \mu\mathrm{id}_H)^{-1} = a^{-1}(A - \lambda_1\mathrm{id}_H)^{-1} \cdots (A - \lambda_N\mathrm{id}_H)^{-1}.$$

und es gäbe ein beschränktes Inverses zu $P(A) - \mu\mathrm{id}_H$, im Widerspruch zu $\mu \in \sigma(P(A))$. Also gilt $\lambda_i \in \sigma(A)$ für ein i. Also ist $\mu = P(\lambda)$ für ein $\lambda \in \sigma(A)$.

□

Nun berechnen wir die Norm von $P(A)$, um Lemma 2.2.22 anwenden zu können:

Lemma 2.5.10.
Sei weiterhin $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$ und A ein symmetrischer Operator aus $L(H)$. Dann gilt

$$\|P(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|.$$

Beweis.
Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\|P(A)\|^2 &= \|P(A)^* P(A)\| && \text{[Korollar 2.2.14]} \\
&= \|(\overline{P}P)(A)\| && \text{[}\Phi\text{ Homomorphismus auf Polynomen]} \\
&= \sup_{\lambda \in \sigma(\overline{P}P(A))} |\lambda| && \text{[Satz 2.3.6]} \\
&= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\overline{P}P(\lambda)| && \text{[Lemma 2.5.9]} \\
&= (\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|)^2
\end{aligned}$$

□

Wir können nun Theorem 2.5.6 beweisen:

Beweis.
Nach dem Weierstraßschen Approximationsatz liegen die Polynome in den stetigen Funktionen auf der kompakten Menge $\sigma(A)$ dicht. Wegen der Identität der Normen in Lemma 2.5.10 hat die Abbildung $P \mapsto P(A)$ auf Polynomen eine eindeutige Fortsetzung Φ auf $C(\sigma(A))$. Wir erhalten eine Abbildung Φ, die die Eigenschaften 1.-7. erfüllt. Wir zeigen hier die Eigenschaften 4. und 6. (die anderen Eigenschaften sind klar bzw. Übg):

Eigenschaft 4. folgt durch Grenzübergang, weil aus $A\psi = \lambda\psi$ für Polynome P die Gleichung $\Phi(P)\psi = P(\lambda)\psi$ gilt. Zu 6.: Ist $f \geq 0$, so schreibe die Funktion $f = g^2$ mit g reell, $g \in C(\sigma(A))$. Dann gilt $\Phi(f) = \Phi(g)^2$ mit $\Phi(g)$ symmetrisch, woraus $\Phi(f) \geq 0$ folgt.
□

Bemerkungen 2.5.11.

1. Es ist $\Phi(f) \geq 0$ genau dann, wenn $f \geq 0$.

2. Da Funktionen eine kommutative Algebra bilden, $fg = gf$ für alle $f, g \in C(\sigma(A))$, ist $\{f(A) | f \in C(\sigma(A))\}$ eine kommutative Unteralgebra von $L(H)$. Da Φ die Norm erhält, ist diese Algebra unter der Norm vollständig und somit eine sogenannte C^*-Algebra und als solche isomorph zur C^*-Algebra $C(\sigma(A))$.

3. Als Anwendung des Funktionalkalküls erhalten wir für positive Operatoren einen (alternativen) Beweis von Satz 2.4.14, der Existenz einer Quadratwurzel positiver Operatoren.

Wir kommen nun zu einer weiteren Formulierung des Spektralsatzes für symmetrische Operatoren A aus $L(H)$, der uns näher an die mathematische Struktur der Quantemechanik bringt. Wir folgen [RS], lassen einige Details weg, brauchen jedoch noch einige Tatsachen aus der Maßtheorie. Für Anwendungen in der Quantenmechanik wird eine Folgerung des Spektralsatzes zentral sein: Für jede offene Teilmenge M von $\mathbb{R}$, und jeden Vektor $\psi \in H$ existiert eine reelle Zahl $\mu_\psi(M)$, die als die Wahrscheinlichkeit interpretiert werden kann, für die dem Operator A zugeordneten Messgröße im Zustand ψ einen Wert zu finden, der in der Menge M enthalten ist.

Für einen festgehaltenen Operator A und einen festgehaltenen Vektor ψ mit $\|\psi\| = 1$ hat die Abbildung $M \mapsto \mu(M) := \mu_\psi(M)$ die folgenden Eigenschaften

$$\text{(i)} \quad \mu(\emptyset) = 0, \qquad \text{(ii)} \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(M_i) \text{ falls } M_i \cap M_j = \emptyset \ \forall i, j,$$

$$\text{(iii)} \quad \mu(\mathbb{R}) = 1.$$

Eine Abbildung $M \mapsto \mu(M)$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) nennt man ein Maß, und wenn zusätzlich (iii) erfüllt ist, spricht man von einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$.

Bemerkungen 2.5.12.

1. Das Lebesgue-Integral basierte wesentlich auf dem translationsinvarianten Maß auf $\mathbb{R}$ mit $\mu([a, b]) = b - a$. Wir arbeiten weiter mit der σ-Algebra der Borelmengen von $\mathbb{R}$, also der kleinsten σ-Algebra, die alle offenen (und abgeschlossenen) Teilmengen von $\mathbb{R}$ enthält.

2. Sei $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige monoton steigende Funktion. Dann existieren für jedes $x \in \mathbb{R}$ die einseitigen Grenzwerte

$$\alpha(a - 0) := \lim_{x \uparrow a} \alpha(x) \text{ und } \alpha(a + 0) := \lim_{x \downarrow a} \alpha(x).$$

Wir führen nun für offene Intervalle in $\mathbb{R}$ ein neues Maß ein, indem wir Intervalle mit Hilfe von α unterschiedlich gewichten:

$$\mu_\alpha\left((a, b)\right) := \alpha(b - 0) - \alpha(a + 0).$$

Dieses Maß kann man fortsetzen zu einem Maß auf Borelmengen von $\mathbb{R}$, das die Regularitätseigenschaft

$$\mu(B) = \sup_{C \subseteq B, C \text{ kompakt}} \mu(C) = \inf_{U \supseteq B, U \text{ offen}} \mu(U)$$

hat. Man nennt ein Maß μ, das auf kompakten Mengen endlich ist, und diese Regularitätseigenschaft hat, ein (reguläres) *Borelmaß*.

Man erhält

$$\mu_\alpha\left([a, b]\right) := \alpha(b + 0) - \alpha(a - 0), \text{ speziell } \mu_\alpha\left(\{a\}\right) = \alpha(a + 0) - \alpha(a - 0).$$

3. Man führt dann Messbarkeit und Integrierbarkeit ein wie für das Lebeguessche Maß. Man definiert für integrierbare Funktionen ein Integral

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_\alpha = \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\alpha$$

das *Lebesgue-Stieltjes Integral*, das linear und monoton ist (siehe z.B. [H01, XI]). Man erhält L^1-Räume, die bezüglich der Metrik $d_\alpha(f,g) = \int_{\mathbb{R}} |f-g| \mathrm{d}\mu_\alpha$ vollständig sind und in denen die stetigen Funktionen dicht liegen. Man zeigt für die Integrale $\int \mathrm{d}\mu_\alpha$ Verallgemeinerungen der uns bekannten Sätze: monotone Konvergenz, majorisierte Konvergenz, Riesz-Fischer und Fubini.

4. Wenn die Funktion α stetig differenzierbar ist, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\alpha = \int_{\mathbb{R}} f \ g \mathrm{d}x, \text{ mit } \ g = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}$$

und wir können alles mit Hilfe des Lebesgue-Maßes beschreiben.

Als anderes Beispiel betrachten wir für α die Heavisidesche Stufenfunktion $\theta = \mathbf{1}_{[0,\infty)}$. Es gilt

$$\mu_\theta(B) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \in B, \\ 0, & \text{wenn } 0 \notin B, \end{cases}$$

und $\int f \mathrm{d}\theta = f(0)$. Wir erhalten das sogenannte *Diracmaß* in 0. Man mache sich klar, dass für dieses Maß $d_\theta(f,g) = |f(0) - g(0)|$ gilt, so dass im L^1-Raum alle Funktionen identifiziert werden, die den gleichen Wert an der Stelle 0 haben. Daher ist der L^1-Raum bezüglich des Dirac-Maßes eindimensional.

5. Sei μ ein Borel-Maß auf $\mathbb{R}$. Die höchstens abzählbare Menge $P := \{x | \mu(\{x\}) \neq 0\}$ heißt die *Menge der reinen Punkte* des Maßes μ, und wir bezeichnen mit μ_{pp} das Maß

$$\mu_{pp}(X) := \mu(P \cap X) = \sum_{x \in P \cap X} \mu(\{x\}).$$

Das Borel-Maß μ heißt *reines Punktmaß*, wenn $\mu(X) = \sum_{x \in X} \mu(\{x\})$ für jede Borelmenge X gilt. Im Gegensatz dazu: Das Maß μ heißt *stetig*, wenn es keine reinen Punkte hat.

Ein Borel-Maß μ heißt

- *absolut stetig relativ zum Lebesgue-Maß*, wenn es eine nichtnegative Funktion $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ gibt, so dass für jede beschränkte Borelfunktion (integrierbare Funktion) f gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} f \ g \mathrm{d}x;$$

- *singulär relativ zum Lebesgue-Maß*, wenn $\mu(S) = 0$ gilt, mit einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}$, so dass $\mathbb{R} \setminus S$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

6. Man zeigt, dass jedes Borel-Maß μ eindeutig geschrieben werden kann als Summe $\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sing}$, wobei μ_{pp} ein reines Punktmaß ist, μ_{ac} absolut stetig relativ zum Lebesgue-Maß und μ_{sing} stetig und singulär zum Lebesgue-Maß.

Betrachtung 2.5.13.
Wir sind an der Integration stetiger Funktionen auf einem kompakten Raum (genauer: kompaktem Hausdorff-Raum) X interessiert.

Ein *positives* lineares Funktional $\ell\colon C(X) \to \mathbb{C}$, ist ein lineares Funktional, so dass für alle $f \in C(X)$ mit $f(x) \geq 0$ punktweise, $\ell(f) \in \mathbb{R}$ und $\ell(f) \geq 0$ gilt.

Sei μ ein (reguläres) Borel-Maß auf X. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \ell_\mu : & C(X) & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & \int_X f \mathrm{d}\mu \; . \end{array}$$

Diese Abbildung ist linear und wegen der Monotonie des Integrals

$$|\ell_\mu(f)| \leq \int_X |f| \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_\infty \mu(X)$$

stetig. Es folgt $\|\ell_\mu\| \leq \mu(X)$. Die konstante Funktion $f = \mathbf{1}_X$ zeigt, dass sogar $\|\ell_\mu\| = \mu(X)$ gilt.

Außerdem ist das Funktional ℓ_μ *positiv*.

Zu einem gegebenen positiven Funktional ℓ auf $C(X)$ möchten wir nun ein reguläres Borel-Maß μ auf X so bestimmen, so dass für die (durch ein reguläres Borel-Maß auf X bestimmten) Funktionale ℓ_μ das Maß μ zurück gewonnen wird.

Der Ansatz ist dann, für kompakte Mengen K,

$$\mu(K) = \inf\{\ell(f) | f \in C(X), f \geq \mathbf{1}_K\}$$

zu setzen, wobei $\mathbf{1}_K$ die charakteristische Funktion der Menge K ist.

Wir bemerken zunächst

Lemma 2.5.14.
Sei X ein kompakter metrischer Raum und $\ell\colon C(X) \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional. Dann ist ℓ bezüglich des Supremumsnorm auf $C(X)$ stetig und es gilt $\|\ell\| = \ell(\mathbf{1}_X)$.

Beweis.

1. Wenn f reelle Werte annimmt, folgt aus $-\|f\|_\infty \leq f \leq \|f\|_\infty$ wegen der Positivität $-\ell(1)\|f\|_\infty \leq \ell(f) \leq \ell(1)\|f\|_\infty$ und somit $|\ell(f)| \leq \|f\|_\infty \ell(1)$.

2. Für eine beliebige Funktion f folgt aus der Polarzerlegung $\ell(f) = e^{-i\phi} r$

$$|\ell(f)| = \mathrm{Re} e^{i\phi} \ell(f) = \ell(\mathrm{Re}[e^{i\phi} f]) \leq \|\mathrm{Re}(e^{i\phi} f)\|_\infty \ell(1) \leq \ell(1)\|f\|_\infty .$$

   Die erste Ungleichung folgt aus Teil 1; die zweite Ungleichung folgt, da $|\mathrm{Re}(e^{i\phi} f)| \leq |f|$ gilt.

□

Wir verwenden den (folgenden) Satz von Riesz-Markov (und verweisen auf [RS], Chapter IV.) Wir setzen voraus, dass X ein kompakter metrischer Raum ist. Allgemeiner wird der Satz für kompakte Hausdorff-Räume formuliert. (Dann muss man allerdings statt mit Maßen auf der Borel-Algebra mit Maßen arbeiten, die auf der σ-Algebra definiert sind, welche von den kompakten G_δ-Mengen von X erzeugt wird. Eine G_δ-Menge ist dabei per Definition ein abzählbarer Durchschnitt offener Mengen.)

Theorem 2.5.15 (Riesz-Markov).
Sei X ein kompakter metrischer Raum. Gegeben sei ein positives lineares Funktional $\ell\colon C(X) \to \mathbb{C}$. Dann existiert ein eindeutiges endliches Borelmaß μ auf X mit

$$\ell(f) = \int f \mathrm{d}\mu.$$

Betrachtung 2.5.16.
Sei A ein symmetrischer Operator aus $L(H)$, sei $X = \sigma(A)$. Sei $\psi \in H$. Dann ist

$$f \mapsto \langle \psi, f(A)\psi \rangle$$

ein positives lineares Funktional ℓ auf $C(X)$.

Der Satz von Riesz-Markov 2.5.15 besagt, dass es zu einem solchen Funktional ℓ ein eindeutiges Borelmaß μ_ψ auf der kompakten Menge $X = \sigma(A)$ gibt mit

$$\langle \psi, f(A)\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) \mathrm{d}\mu_\psi(\lambda).$$

Das Maß μ_ψ heißt das *Spektralmaß* des Operators A zum Vektor $\psi \in H$.

Man beachte, dass nach Theorem 2.5.6.1 für die konstante Funktion $f = 1$ gilt $f(A) = \mathrm{id}_H$ und somit

$$\mu_\psi(\sigma(A)) = \int_{\sigma(A)} \mathrm{d}\mu_\psi = \|\psi\|^2.$$

(Spektralmaße sind endliche Maße.)

Wir können nun den Funktionalkalkül aus Theorem 2.5.6 von stetigen Funktionen auf die Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ der beschränkten Borelfunktionen auf $\mathbb{R}$ ausdehnen. Wir definieren für eine Borelfunktion $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und einen symmetrischen Operator A aus $L(H)$ zunächst die Diagonalmatrixelemente

$$\langle \psi, g(A)\psi \rangle := \int_{\sigma(A)} g(\lambda) \mathrm{d}\mu_\psi(\lambda),$$

und erhalten daraus $\langle \psi, g(A)\phi \rangle$ durch Polarisierung, vgl. Lemma 2.2.3, und daraus den Operator $g(A)$ mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes 2.1.5.

Wir erhalten

Theorem 2.5.17 (Spektralsatz - beschränkter Funktionalkalkül).
Sei A ein symmetrischer Operator aus $L(H)$, H Hilbertraum. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung

$$\hat{\Phi}\colon \quad \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L(H)$$

von den beschränkten Borelfunktionen auf $\mathbb{R}$ in die beschränkten Operatoren mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\hat{\Phi}$ ist ein unitaler $*$-Algebra-Morphismus.
2. $\hat{\Phi}$ ist stetig: $\|\hat{\Phi}(f)\|_{L(H)} \leq \|f\|_\infty$.
3. Für die Funktion $f(x) = x$ auf $\sigma(A)$ gilt $\hat{\Phi}(f) = A$.
4. Es gelte $f_n(x) \to f(x)$ fast überall und $\|f_n\|_\infty$ sei beschränkt. Dann gilt $\hat{\Phi}(f_n) \to \hat{\Phi}(f)$ bezüglich der Norm. (Hier geht der Satz über majorisierte Konvergenz ein.)

$\hat{\Phi}$ hat die weiteren Eigenschaften:

5. Aus $A\psi = \lambda\psi$ folgt $\hat{\Phi}(f)\psi = f(\lambda)\psi$.
6. Aus $f \geq 0$ folgt $\hat{\Phi}(f) \geq 0$.
7. Aus $BA = AB$ folgt $\hat{\Phi}(f)B = B\hat{\Phi}(f)$.

Aus dem Struktursatz über Maße in Bem. 2.5.12.1, der Zerlegung $\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sing}$ mit einem reinen Punktmaß μ_{pp}, einem Maß μ_{ac}, das absolut stetig zum Lebesgue-Maß ist, und einem singulären Anteil, erhalten wir:

Bemerkungen 2.5.18.

1. Sei A symmetrischer Operator aus $L(H)$, H Hilbertraum. Dann setzen wir

$$\begin{array}{rcl} H_{pp} & := & \{\psi \in H | \mu_\psi \text{ ist reines Punktmaß}\} \\ H_{ac} & := & \{\psi \in H | \mu_\psi \text{ ist absolut stetig}\} \\ H_{sing} & := & \{\psi \in H | \mu_\psi \text{ ist singulär}\} \end{array}$$

2. Man zeigt, dass man H als Hilbertsche Summe, also als direkte Summe orthogonaler abgeschlossener Unterräume

$$H = H_{pp} \oplus H_{ac} \oplus H_{sing}$$

schreiben kann, wobei alle Unterräume unter A invariant sind.

3. Setzt man

$$\begin{array}{rl} \sigma_{pp}(A) & := \sigma_p(A) = \{\lambda | \lambda \text{ ist Eigenwert}\} \\ \sigma_{ac}(A) & := \sigma(A|_{H_{ac}}) \\ \sigma_{sing}(A) & := \sigma(A|_{H_{sing}}) \end{array}$$

so gilt

$$\sigma(A) = \overline{\sigma_{pp}(A)} \cup \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sing}(A).$$

Diese Vereinigung ist aber i.a. nicht disjunkt. Man sollte sie nicht mit der Zerlegung in Bem. 2.5.28 verwechseln.

Für die nächste Formulierung des Spektralsatzes brauchen wir einen weiteren Begriff:

Definition 2.5.19

Sei A ein linearer Operator auf einem Hilbertraum H. Ein Vektor $\psi \in H$ heißt zyklisch *für A, wenn der von den Vektoren $(A^n\psi)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugte Unterraum dicht in H ist.*

Lemma 2.5.20.

Sei A ein symmetrischer Operator aus $L(H)$ mit zyklischem Vektor $\psi \in H$. Dann gibt es einen unitären Operator

$$U\colon H \to L^2(\sigma(A), \mathrm{d}\mu_\psi)$$

so dass

$$UAU^{-1}f(\lambda) = \lambda f(\lambda)$$

gilt, mit Gleichheit im Sinne von L^2-Räumen.

Ein symmetrischer Operator aus $L(H)$, der einen zyklischen Vektor hat, ist also unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator.

Beweis.
Wir setzen zunächst, für f stetige Funktion, $U\Phi(f)\psi := f$. Um zu zeigen, dass U wohldefiniert ist, bemerken wir, dass

$$\|\Phi(f)\psi\|^2 = \langle\psi, \Phi^*(f)\Phi(f)\psi\rangle = \langle\psi, \Phi(\overline{f}f)\psi\rangle = \int_{\sigma(A)} |f(\lambda)|^2 \mathrm{d}\mu_\psi$$

gilt, wobei in der letzten Gleichheit die Definition des Spektralmaßes μ_ψ benutzt wurde. Daher folgt aus $f = g$ μ_ψ-fast überall, dass $\Phi(f)\psi = \Phi(g)\psi$ gilt. Also ist U auf dem dichten Unterraum $\{\Phi(f)\psi | f \in C(\sigma(A))\}$ wohldefiniert und normerhaltend. Nach Lemma 2.2.22 kann man U eindeutig zu einer Isometrie auf H in $L^2(\sigma(A), \mathrm{d}\mu_\psi)$ fortsetzen. Weil die stetigen Funktionen in $L^2(\sigma(A))$ dicht liegen, ist die Isometrie surjektiv.

Schließlich rechnen wir für $f \in C(\sigma(A))$

$$(UAU^{-1}f)(\lambda) \overset{\text{def}}{=} (UA\Phi(f)\psi)(\lambda) = (U\Phi(xf)\psi)(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \lambda f(\lambda)$$

wobei wir bei der zweiten Gleichheit $A = \Phi(x)$ und die Homomorphismuseigenschaft von Φ ausgenutzt haben. Diese Gleichheit setzt sich auf den Abschluss $L^2(\sigma(A))$ von $C(\sigma(A))$ fort. □

Nun hat nicht jeder selbstadjungierte Operator einen zyklischen Vektor; es gilt jedoch:

Lemma 2.5.21.
Sei A symmetrischer Operator aus $L(H)$, H Hilbertraum. Dann gibt es eine (nicht eindeutige) Zerlegung in eine höchstens abzählbare direkte Hilbertsche Summe $H = \oplus_{n=1}^N H_n$ mit $N \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$, so dass gilt

- A lässt jeden der Unterräume H_n invariant, d.h. aus $\psi \in H_n$ folgt $A\psi \in H_n$.
- Für jedes n gibt es einen Vektor $\psi_n \in H_n$, der für die Restriktion $A|_{H_n}$ zyklisch ist.

Man erhält damit eine weitere Form des Spektraltheorems für symmetrische Operatoren $A \in L(H)$, wobei wir Maße auf $\sigma(A)$ zu Maßen auf $\mathbb{R}$ fortsetzen (siehe auch Bemerkung 2.5.5):

Theorem 2.5.22 (Spektralsatz - Multiplikationsoperatoren)**.**
Sei A symmetrischer Operator aus $L(H)$, H Hilbertraum. Dann existieren endliche Maße $(\mu_n)_{n\geq 1}$ auf dem Spektrum $\sigma(A)$ und ein unitärer Operator

$$U\colon H \to \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu_n)$$

so dass $(UAU^{-1}f)_n(\lambda) = \lambda f_n(\lambda)$ für $f = (f_1, f_2, \ldots) \in \oplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu_n)$ gilt. Man nennt dies eine *spektrale Realisierung* von A.

Anders ausgedrückt:

Korollar 2.5.23.
Sei A ein symmetrischer Operator aus $L(H)$, H Hilbertraum. Dann gibt es einen *endlichen* Maßraum (M, μ) und eine beschränkte Funktion g auf M und eine unitäre Abbildung

$$U\colon H \to L^2(M, \mathrm{d}\mu),$$

so dass gilt

$$(UAU^{-1}\varphi)(m) = g(m)\varphi(m).$$

Jeder symmetrische Operator aus $L(H)$ ist also äquivalent zu einem Multiplikationsoperator auf einem endlichen Maßraum.

Beweis.
Wir wählen die Normierung der zyklischen Vektoren (ψ_n) so, dass $\|\psi_n\|^2 = 2^{-n}$ gilt. Als Maßraum M wählen wir die disjunkte Vereinigung von N Kopien von $\mathbb{R}$; wir definieren das Maß μ durch seine Restriktion auf die i-te Kopie, die $\mu_i = \mu_{\psi_i}$ sei. Dann ist

$$\mu(M) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i(\mathbb{R}) = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} < \infty.$$

Das Spektralmaß ist also endlich. Die Einschränkung der Funktion g auf die i-te Komponente ist die Funktion $g_i(\lambda) = \lambda$. □

Bemerkungen 2.5.24.

1. Man beachte, dass in das Spektralmaß in Theorem 2.5.22 und Korollar 2.5.23 Wahlen eingehen; weder das Maß noch die Funktion g sind kanonisch bestimmt.

2. Sei A ein symmetrischer Operator auf einem endlich-dimensionalen Hilbertraum, $\dim_{\mathbb{C}}(H) = n$. Dann können wir A diagonalisieren, es gibt eine Basis $(\psi_i)_{i=1,\ldots,n}$ von orthonormalen Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_i \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Im Fall, dass wir n verschiedene Eigenwerte λ_i haben, betrachten wir die Summe $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\theta_i}$ der Dirac-Maße zu den Punkten λ_i und beachten, dass $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$ gerade $\mathbb{C}^n$ ist, da alle Funktionen identifiziert werden, die die gleichen Werte an allen Stellen λ_i haben. Nun beschreiben wir $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$ durch $(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))$, und $\lambda \mapsto \lambda f(\lambda)$ aus $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$ entspricht $(\lambda_1 f(\lambda_1), \ldots, \lambda_n f(\lambda_n))$. Dies gibt eine Beschreibung von A als Multiplikationsoperator auf $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$. Im Fall, dass die Werte λ_i mit Multiplizitäten > 1 auftreten, benötigt man $\bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu_n)$ mit $N > 1$ in der Beschreibung aus Satz 2.5.22.

3. Theorem 2.5.22 ist eine rigorose Version der im "Dirac-Formalismus" oft verwendeten Aussage, dass wir nach Wahl einer "Darstellung" schreiben können

$$\begin{aligned} \langle \psi, \phi \rangle &= \sum_{n=1}^{N} \int \overline{\psi_n(\lambda)} \phi_n(\lambda) \mathrm{d}\mu_n \\ \langle \psi, A\phi \rangle &= \sum_{n=1}^{N} \int \overline{\psi_n(\lambda)} \lambda \phi_n(\lambda) \mathrm{d}\mu_n \end{aligned}$$

   Die Darstellung ist durch den unitären Operator U gegeben. Als Beispiele für A betrachte man den Orts- oder den Impulsoperator (unbeschränkt!), die wir im nächsten Abschnitt behandeln.

Wir definieren eine Familie $P = (P_\Omega)_\Omega$ von orthogonalen Projektoren, *Spektralfamilie* genannt: Da wir den Funktionalkalkül für Borelfunktionen haben, können wir auch Operatoren aus charakteristischen Funktionen von Borelmengen erhalten.

Definition 2.5.25
Sei A ein symmetrischer Operator aus $L(H)$ und Ω eine Borelmenge in $\mathbb{R}$. Dann heißt $P_\Omega := \mathbf{1}_\Omega(A) = \hat{\Phi}(\mathbf{1}_\Omega)$ auch die Spektralprojektion *von A zur Borelmenge Ω in $\mathbb{R}$.*

Da $\hat{\Phi}$ ein Morphismus von $*$-Algebren ist, folgt aus $\mathbf{1}_\Omega^2 = \mathbf{1}_\Omega$ und $\overline{\mathbf{1}_\Omega} = \mathbf{1}_\Omega$ mit Satz 2.2.15, dass P_Ω für jede Borelmenge Ω ein orthogonaler Projektor ist. Es gilt:

Theorem 2.5.26 (Spektralsatz - projektorwertige Maße).
Die Familie $(P_\Omega)_\Omega$ der Spektralprojektionen eines symmetrischen Operators aus $L(H)$ hat die folgenden Eigenschaften:

1. Jeder Operator P_Ω ist eine orthogonale Projektion.
2. $P_\emptyset = 0$ und $P_{(-a,a)} = \mathrm{id}_H$ für a groß genug.
3. Gilt $\Omega = \cup_{n=1}^\infty \Omega_n$ mit $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$ für alle $n \neq m$, so gilt $P_\Omega = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N P_{\Omega_n}$.
4. Des Weiteren gilt $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$.

Bemerkungen 2.5.27.

1. Eine Familie von Projektoren, die 1. -3. erfüllt, heißt ein beschränktes projektorwertiges Maß (wir sprechen auch von einem *Spektralmaß*, hier im beschränkten Fall). Für ein beschränktes projektorwertiges Maß folgt Eigenschaft 4. aus allgemeinen Gründen aus den Axiomen 1. -3. (ÜA).
2. Man kann über projektorwertige Maße integrieren, die Integrale liegen im Banachraum $L(H)$. Für jedes $\psi \in H$ ist $\langle \psi, P_\cdot \psi \rangle \colon \Omega \mapsto \langle \psi, P_\Omega \psi \rangle$ ein gewöhnliches Maß. Für jede beschränkte Borelfunktion f auf suppP_Ω gibt es einen eindeutigen Operator $B = \int f(\lambda) \mathrm{d}P_\lambda$, so dass gilt
$$\langle \psi, B\psi \rangle = \int f(\lambda) \mathrm{d}\langle \psi, P_\cdot \psi \rangle(\lambda).$$
Es ist dann offensichtlich $f(A) = \int f(\lambda) \mathrm{d}P_\lambda \in L(H)$.
3. Es gibt eine Bijektion zwischen den symmetrischen Operatoren A aus $L(H)$ und den beschränkten projektorwertigen Maßen $P = (P_\Omega)$:
$$A \mapsto P = (\mathbf{1}_\Omega(A)) \text{ und } (P_\Omega) \mapsto A = \int \lambda \mathrm{d}P_\lambda.$$
4. Die projektorwertigen Maße und Spektralmaße geben eine klare Interpretation des quantenmechanischen Formalismus. Man nennt einen eindimensionalen Unterraum von H einen (reinen) *Zustand*. Oft beschreibt man Zustände durch normierte Vektoren $x \in H$ mit $\|x\| = 1$; dann muss man x und $e^{i\alpha}x \in$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ identifizieren.

   Eine *Observable* eines quantenmechanischen Systems wird dann beschrieben durch einen Operator A auf H, wobei wir im nächsten Abschnitt wieder Operatoren mit dichtem Definitionsbereich $D(A) \subseteq H$ zulassen werden.

   Die möglichen Messwerte von A sind dann durch das Spektrum $\sigma(A)$ gegeben. Die Forderung nach reellen Messwerten führt zur Forderung, dass A selbstadjungiert ist. Hierzu kann dann das projektorwertige Maß $P = (P_\Omega)$ zu A und, bei gegebenem Zustand ψ, das durch μ_ψ gegebene Wahrscheinlichkeitsmaß $\langle \psi, P_\cdot \psi \rangle$ auf dem Raum $\sigma(A)$ der möglichen Messwerte betrachtet werden. Konkret gibt dann $\langle \psi, P_\Omega \psi \rangle$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Messwert der Observablen A im Zustand ψ in die Borelmenge $\Omega \subseteq \sigma(A)$ fällt.

Wir erwähnen noch eine andere Zerlegung des Spektrums, die nicht mit der aus Bemerkung 2.5.18 verwechselt werden darf.

Bemerkungen 2.5.28.

1. Man zeigt zunächst, dass genau dann $\lambda \in \sigma(A)$ gilt, wenn für die Projektoren gilt $P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)} \neq 0$ für alle $\epsilon > 0$.

2. Man sagt dann λ liege im *wesentlichen Spektrum*, wenn $P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}$ unendlich-dimensionales Bild hat für alle $\epsilon > 0$. Falls $\lambda \in \sigma(A)$ gilt, aber für ein $\epsilon > 0$ das Bild von $P_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}$ endlich-dimensional ist, sagen wir, λ liege im diskreten Spektrum.

3. Das wesentliche Spektrum ist abgeschlossen. Das diskrete Spektrum besteht genau aus den isolierten Punkte von $\sigma_p(A)$, die Eigenwerte endlicher Vielfachheit sind.

2.6 Unbeschränkte Operatoren: Selbstadjungiertheit und Spektralsätze

Sei H ein Hilbertraum. Wir kommen jetzt zurück auf dicht definierte Operatoren $f\colon D(f) \to H$ auf H.

Beispiel 2.6.1.

1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen und nicht-leer. Den Operator $\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ können wir nicht einfach auf alle Funktionen $\varphi \in L^2(\Omega)$ anwenden, denn es hat nicht jede L^2-Funktion eine schwache Ableitung, die in L^2 liegt, vgl. auch Bemerkung 2.1.18. Aber immerhin liegt der Sobolevraum $W^{1,2}(\Omega)$ aus Bemerkung 2.1.18 dicht in $L^2(\Omega)$ bezüglich der L^2-Norm.

   Wir können den dicht definierten Operator $A := \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ mit $D(A) = L^2(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ betrachten. Dieser Operator ist unbeschränkt und daher nicht stetig: Zum Beispiel betrachten wir $\Omega := (-\pi, \pi)$ und betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

   $$\varphi_n(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt).$$

   Die Funktionen sind alle normiert:

   $$\|\varphi_n\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos(2nt))\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\mathrm{d}t = 1.$$

   Andererseits gilt

   $$\|A\varphi_n\|^2 = \frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nt)\mathrm{d}t = \frac{n^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(2nt)+1)\mathrm{d}t = n^2.$$

   Für die normierten Funktionen φ_n in $D(A)$ bilden die Normen $\|A\varphi_n\|$ eine unbeschränkte Folge; also ist A unbeschränkt.

2. Ähnlich betrachte man den Multiplikationsoperator $f \mapsto x \cdot f$, der zum Beispiel auf dem dichten Unterraum $C_c(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger definiert sei. Es ist klar, dass dieser Operator nicht beschränkt ist: Sei φ eine Funktion mit Träger in $[-1, 1]$ mit $\|\varphi\|_2 = 1$, dann haben für $\varphi_n(x) := \varphi(x - n)$ die Funktionen $x\varphi_n(x)$ beliebig große L^2-Norm.

Bemerkungen 2.6.2.

1. Für den Operator $A := \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\colon W^{1,2}(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ gilt für $\varphi, \psi \in C_c^1(\mathbb{R}) \subseteq W^{1,2}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$:
$$\langle \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi, \psi\rangle = -\frac{1}{i}\int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\varphi'(x)} \cdot \psi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{i}\int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\psi'(x)\mathrm{d}x = \langle \varphi, \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi\rangle,$$
weil die Randterme verschwinden. Nun ist zwar A ein (dicht definierter) unbeschränkter Operator auf $L^2(\mathbb{R})$. Aber verwendet man die Sobolev-Norm $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ auf dem Definitionsbereich, so ist der auf $C_c^1(\mathbb{R}) \subseteq W^{1,2}(\mathbb{R})$ dicht definierte Operator $\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\colon (W^{1,2}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{W^{1,2}}) \to L^2(\mathbb{R})$ stetig und auf das ganze Definitionsgebiet $W^{1,2}(\mathbb{R})$ von A stetig fortsetzbar. Obige Gleichung gilt damit auf $W^{1,2}(\mathbb{R})$, d.h. der Operator A ist symmetrisch, siehe Definition 2.5.3.

2. Dann liefert die Fouriertransformation
$$(Uf)(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x$$
einen Operator, so dass gilt
$$U\left(\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\right)(k) = kUf(k),$$
zum Beispiel für $f \in C_c^1(\mathbb{R})$. Dies legt es nahe, die Fouriertransformation als eine Spektraldarstellung eines unbeschränkten Operators zu verstehen.

Definition 2.6.3

1. *Sei H ein Hilbertraum und seien $f\colon D(f) \to H$, $g\colon D(g) \to H$ lineare Abbildungen, deren Definitionsbereiche $D(f)$ und $D(g)$ Untervektorräume von H sind. Gilt dann $D(f) \subseteq D(g)$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D(f)$, so heißt g eine* Fortsetzung *oder* Erweiterung *von f. Wir schreiben $g \supset f$.*

2. *Man nennt einen dicht definierten Operator* abschließbar, *wenn es eine abgeschlossene Fortsetzung gibt.*

Beispiel 2.6.4.
Sei $f\colon D(f) \to H$ ein auf $D(f) \subseteq H$ dicht definierter Operator. Wir haben in Satz 2.5.4 gesehen, dass der zu f adjungierte Operator f^* stets abgeschlossen ist.

Lemma 2.6.5.
Sei $f\colon D(f) \to H$ ein auf $D(f) \subseteq H$ dicht definierter Operator.

1. Sei g eine Fortsetzung von f. Dann gilt $D(g^*) \subseteq D(f^*)$.

2. Sei nun f symmetrisch. Dann ist der adjungierte Operator f^* eine Fortsetzung von f, also $f^* \supset f$. Im Allgemeinen handelt es sich um eine echte Fortsetzung.

Beweis.
Wir erinnern an Definition 2.5.2: Es ist $D(f^*) = D^* = \{y \in H| \quad \exists \quad y^* \in H$ mit $\langle f(x), y\rangle = \langle x, y^*\rangle$ für alle $x \in D(f).\}$. Nun sei $g \supset f$, insbesondere $D(f) \subseteq D(g)$.
Dann gilt aber $\{y \in H| \quad \exists \quad y^* \in H$ mit $\langle g(x), y\rangle = \langle x, y^*\rangle$ für alle $x \in D(g)\} \subseteq D(f^*)$, da $g(x) = f(x)$ für alle $x \in D(f)$ gilt.

Sei jetzt f symmetrisch. Dann folgt aus (Sy) für alle $y, x \in D(f)$:

$$\langle y, f(x)\rangle = \langle y^*, x\rangle \text{ mit } y^* = f(y);$$

insbesondere $D(f^*) \supseteq D(f)$ und $f^*(y) = f(y)$ für alle $y \in D(f)$. □

Betrachtung 2.6.6.
Sei H ein Hilbertraum und $f\colon D(f) \to H$ ein dicht definierter *abschließbarer* linearer Operator.

Wir betrachten zunächst eine beliebige abgeschlossene Fortsetzung g von f.

Es gilt $D(f) \subseteq D(g)$. Man setze für $x, y \in D(g)$

$$[x, y]_g := \langle x, y\rangle + \langle g(x), g(y)\rangle;$$

man rechnet dann direkt nach, dass dies ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $D(g)$ ist, das wie üblich durch

$$\|x\|_g := \sqrt{[x, x]_g}$$

eine Norm auf $D(g)$ definiert.

Der Vektorraum $D(g)$ ist mit dem Skalarprodukt $[\ ,\ ]_g$ ein Hilbertraum, und g liefert eine stetige Abbildung $D(g) \to H$.

[

Denn sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $D(g)$; dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein n_0, so dass

$$\|x_n - x_m\|_g < \varepsilon \text{ für alle } n, m > n_0,$$

was impliziert

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon \text{ und } \|g(x_n) - g(x_m)\| < \varepsilon$$

für alle $n, m > n_0$. Da H als Hilbertraum vollständig ist, existieren die Grenzwerte der Cauchy-Folgen (x_n) und $g(x_n)$ in H:

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n \text{ und } y := \lim_{n\to\infty} g(x_n).$$

Da der Operator g abgeschlossen ist, gilt

$$x \in D(g) \text{ und } g(x) = y.$$

Damit folgt aber

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_g^2 = \lim_{n\to\infty} (\|x_n - x\|^2 + \|g(x_n) - g(x)\|^2) = 0,$$

also $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ auch bezüglich der Norm $\|\cdot\|_g$. Somit folgt die Behauptung.

]

Wegen $g \supset f$ gilt $D(f) \subseteq D(g)$ und $D(f)$ ist ein Untervektorraum des Hilbertraums $D(g)$.

Wir definieren nun einen dicht definierten Operator f^- auf H wie folgt: Den Abschluss von $D(f)$ im Hilbertraum $D(g)$ wählen wir als $D(f^-)$, und wir bestimmen hierauf f^- durch

$$f^-(x) := g(x).$$

Damit ist f^- linear und stetig bezüglich der Norm $\|\cdot\|_g$, und es gilt $g \supset f^- \supset f$.

Wir behaupten, dass der Operator f^- abgeschlossen ist. Außerdem ist f^- als abgeschlossener Operator durch f eindeutig bestimmt mit der Eigenschaft, dass für jede abgeschlossene Fortsetzung h von f gilt $h \supset f^- \supset f$.

Beweis.

- Wir wollen zeigen, dass der Operator f^- abgeschlossen ist. Dazu bemerken wir, dass als abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums $D(g)$ der Definitionsbereich $D(f^-)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_g = \|\cdot\|_{f^-}$ ein Hilbertraum ist. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(f^-)$ mit

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ und } \lim_{n\to\infty} f^-(x_n) = y;$$

  diese Grenzwerte sind im Hilbertraum H zu verstehen. Wegen

  $$\|x_n - x_m\|_{f^-}{}^2 = \|x_n - x_m\|^2 + \|f^-(x_n) - f^-(x_m)\|^2,$$

  ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Hilbertraum $(D(f^-), \|\cdot\|_{f^-})$ und damit in $(D(g), \|\cdot\|_g)$. Da $D(g)$ ein Hilbertraum ist, konvergiert sie gegen ein $x \in D(g)$. Da $D(f^-)$ abgeschlossen ist, ist $x \in D(f^-)$, und es gilt

  $$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \|f^-(x_n) - f^-(x)\| = 0.$$

  Also ist der Operator f^- abgeschlossen.

- Sei nun der Operator h eine beliebige abgeschlossene Fortsetzung von f. Da $D(f)$ dicht in $D(f^-)$ liegt, gibt es zu jedem $x \in D(f^-)$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D(f)$ und $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|_{f^-} = 0$, also

  $$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \|f(x_n) - f^-(x)\| = 0.$$

  Da auch h eine Fortsetzung von f ist, folgt aus $x_n \in D(f) \subseteq D(h)$

  $$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f^-(x);$$

  da h abgeschlossen ist, gilt $h(x) = f^-(x)$ und somit $h \supset f^-$.

$\square$

Definition 2.6.7

1. *Der zum abschließbaren linearen Operator f in Betrachtung 2.6.6 definierte Operator f^- heißt der* Abschluss *von f.*

2. *Ein symmetrischer Operator $A\colon D(A) \to H$ heißt* wesentlich selbstadjungiert, *wenn sein Abschluss selbstadjungiert ist.*

Bemerkungen 2.6.8 (und Definition)**.**

1. Man zeigt ([RS, VIII]):

   Ein dicht definierter linearer Operator $f\colon D(f) \to H$ auf H ist abschließbar genau dann, wenn $D(f^*)$ dicht in H ist.

   In diesem Fall ist $(f^*)^*$ definiert und es gilt $f^- = (f^*)^*$.

2. Den Begriff des Spektrums und der Resolventenmenge hatten wir in Definition 2.3.2 schon für dicht definierte Operatoren eingeführt. Auch die Resolventenformel aus Betrachtung 2.3.4 gilt.

   Man zeigt jedoch, dass die Resolventenmenge eines dicht definierten Operators nur dann nicht-leer ist, wenn der Operator abgeschlossen ist (siehe z.B. [W]). Deshalb modifizieren wir die Definition 2.3.2 sinnvollerweise, indem wir fordern, dass der betrachtete dicht definierte Operator abgeschlossen oder zumindest abschließbar sein soll, wobei wir im Falle abschließbarer Operatoren unter dem Spektrum immer das Spektrum des Abschlusses verstehen.

3. In der Quantenmechanik schreibt man oft in einem ersten Schritt symmetrische Operatoren hin. Für diese muss man dann selbstadjungierte Erweiterungen finden. Zu einem symmetrischen Operator kann es eine, mehrere oder auch keine Erweiterungen geben. Man kann zeigen, dass die selbstadjungierten Erweiterungen in Bijektion zu unitären Abbildungen
   $$\ker(A^* - i\,\mathrm{id}_H) \to \ker(A^* + i\,\mathrm{id}_H)$$
   sind. Diese Räume werden in der Folge auch eine Rolle spielen.

Lemma 2.6.9.
Sei $f\colon D(f) \to H$ ein selbstadjungierter Operator in H.

1. Dann gilt für alle $x \in D(f)$
   $$\|(f \pm i\,\mathrm{id}_H)(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|x\|^2,$$
   und damit insbesondere $\|(f \pm i\,\mathrm{id}_H)(x)\| \geq \|x\|$.

2. Es existieren die Umkehrfunktionen $(f \pm i\,\mathrm{id}_H)^{-1}$.

   Sie sind auf ganz H definierte und *stetige* Operatoren.

Beweis.

1. Wir rechnen für $x \in D(f)$
   $$\|(f \pm i\,\mathrm{id}_H)(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|ix\|^2 \pm \langle f(x), ix\rangle \pm \langle ix, f(x)\rangle = \|f(x)\|^2 + \|x\|^2,$$
   denn, da f symmetrisch ist, gilt wegen der Sesquilinearität des Skalarprodukts
   $$\langle f(x), ix\rangle = i\langle f(x), x\rangle \overset{\text{(Sy)}}{=} i\langle x, f(x)\rangle = -\langle ix, f(x)\rangle.$$

2. Es folgt sofort, dass $\ker(f \pm i\,\mathrm{id}_H) = \{0\}$.

3. Aus den Ungleichungen folgt sofort, dass die Operatoren $(f \mp i\,\mathrm{id})^{-1}$ stetige Operatoren auf den Untervektorräumen $D_\pm := (f \mp i\,\mathrm{id}_H)(D(f))$ von H sind.

   Wir zeigen nun, dass die Unterräume $D_\pm$ abgeschlossen und gleich H sind.

   Wir beschränken uns hierbei auf den Fall des Operators $R := (f - i\,\mathrm{id}_H)^{-1}$ und setzen $D := D_+ \subseteq H$.

   Um zu sehen, dass D abgeschlossen ist, sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus D, die gegen ein $z \in H$ konvergiert. Sei
   $$y_n := (f - i\,\mathrm{id}_H)^{-1}(z_n) \in D(f).$$
   Dann ist wegen der Ungleichungen
   $$\|y_n - y_m\| = \|(f - i\,\mathrm{id}_H)^{-1}(z_n - z_m)\| \leq \|z_n - z_m\|$$
   die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H. Es existiert also für jede solche Folge $y := \lim_{n\to\infty} y_n \in H$. Als selbstadjungierter Operator ist f nach Satz 2.5.4 abgeschlossen. Somit ist auch $f - i\,\mathrm{id}_H$ abgeschlossen.

   Daher folgt aus
   $$(f - i\,\mathrm{id}_H)(y_n) = z_n \to z \text{ und } y_n \to y$$
   dass $y \in D(f - i\,\mathrm{id}_H) = D(f)$ und $z = (f - i\,\mathrm{id}_H)(y) \in D$ gilt. Wegen $z \in D$ ist $D \subseteq H$ abgeschlossen.

4. Angenommen, es wäre $D \neq H$; da D abgeschlossen ist, hätten wir dann eine orthogonale Zerlegung
   $$H = D \oplus D^\perp$$
   und es gäbe ein $y \in D^\perp$ mit $y \neq 0$. Für dieses $y \in H$ gilt dann
   $$\langle (f - i\,\mathrm{id}_H)(x), y\rangle = 0 = \langle x, 0\rangle \text{ für alle } x \in D(f - i\,\mathrm{id}_H) = D(f).$$
   Also gilt
   $$0 = (f - i\,\mathrm{id}_H)^*(y) = (f + i\,\mathrm{id}_H)(y)$$
   im Widerspruch zur Injektivität des Operators $f + i\,\mathrm{id}_H$.

□

Wir fassen zusammen und ergänzen:

Korollar 2.6.10.
Sei T ein dicht definierter symmetrischer Operator auf einem Hilbertraum H.

1. Dann sind äquivalent:
   (a) Der Operator ist selbstadjungiert.
   (b) T ist abgeschlossen und $\ker(T^* \pm i\,\mathrm{id}_H) = \{0\}$.
   (c) $\mathrm{im}(T \pm i\,\mathrm{id}_H) = H$
2. Ebenfalls sind äquivalent:
   (a) Der Operator ist wesentlich selbstadjungiert.
   (b) $\ker(T^* \pm i\,\mathrm{id}_H) = \{0\}$.

(c) $\mathrm{im}(T \pm i\,\mathrm{id}_H)$ ist dicht in H.

Beweis.
Wir zeigen nur die Aussagen über selbstadjungierte Operatoren.

(a) $\Rightarrow$ (b)

folgt aus Satz 2.5.4 und der Ungleichung in Lemma 2.6.9.

(b) $\Rightarrow$ (c)

folgt aus Teil 4. des Beweises von Lemma 2.6.9.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Sei $v \in D(T^*)$. Wegen der Voraussetzung $\mathrm{im}(T - i\,\mathrm{id}_H) = H$ finde ein $\eta \in D(T)$ mit $(T - i\,\mathrm{id})\eta = (T^* - i\,\mathrm{id})v$. Da T symmetrisch ist, gilt $D(T) \subseteq D(T^*)$ und somit $v - \eta \in D(T^*)$. Somit ist $(T^* - i\,\mathrm{id}_H)(v - \eta) = 0$.

Allgemein gilt nun $\ker T^* = (\mathrm{im} T)^\perp$, denn $x \in \ker T^*$ gilt genau dann, wenn $0 = \langle T^* x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ für alle $y \in D(T)$ gilt.

Aus der anderen Voraussetzung $\mathrm{im}(T + i\,\mathrm{id}_H) = H$ folgt daher $\ker(T^* - i\,\mathrm{id}_H) = \{0\}$, und somit $v = \eta \in D(T)$. Also ist $D(T) = D(T^*)$, und T ist selbstadjungiert.

□

Für die spätere Verwendung halten wir fest, dass der Beweis sich leicht so verallgemeinern lässt, dass folgt

Korollar 2.6.11.
Sei T ein dicht definierter symmetrischer Operator auf einem Hilbertraum H. Dann ist T genau dann selbstadjungiert, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $\mathrm{im}(T - \lambda \mathrm{id}_H) = H$ und $\mathrm{im}(T - \overline{\lambda}\mathrm{id}_H) = H$ gilt.

Beispiel 2.6.12 (Differentiationsoperator auf dem Intervall)**.**

- Eine Funktion auf einem kompakten Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ heißt *absolut stetig*, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede endliche Familie disjunkter Intervalle $[x_i, x_i']$ von Gesamtlänge
$$\sum_{i=1}^{N} |x_i' - x_i| < \delta$$
gilt
$$\sum_{i=1}^{N} |f(x_i') - f(x_i)| < \epsilon.$$
Es gilt: Ist f absolut stetig, so ist f Lebesgue-fast überall differenzierbar, mit Ableitung $f' \in L^1([a, b])$ und f ist Stammfunktion von f'. Umgekehrt sind Stammfunktionen von L^1-Funktionen absolut stetig.

- Sei
$$AC([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist absolut stetig und } f' \in L^2([a, b])\}.$$

- Der Operator $T = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ mit
$$D(T) = \{\varphi \in AC([0,1]) | \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$$
ist symmetrisch, wie man durch partielle Integration zeigt. Man zeigt, dass sein adjungierter Operator gleich $T^* = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ mit $D(T^*) = AC([0,1])$ ist. Da $e^{\pm x} \in D(T^*)$ und
$$\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\pm x} = \mp i e^{\pm x}$$
gilt, ist T wegen Korollar 2.6.10 nicht wesentlich selbstadjungiert. Tatsächlich ist T aber abgeschlossen (Übg).

- Es gibt für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ eine selbstadjungierte Erweiterung von T: Dies ist der Operator $T_\alpha = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ mit Definitionsbereich
$$D(T_\alpha) = \{\varphi \in AC([0,1]) | \varphi(0) = \alpha\varphi(1)\}.$$
Es gilt $T^* \supset T_\alpha \supset T$ für alle α.

- Schreiben wir $\alpha = e^{-i\lambda_0}$ mit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Die Eigenfunktionen von T_α sind $\psi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$ mit $\lambda \in \lambda_0 + 2\pi\mathbb{Z}$. Somit hängt das Spektrum von α ab! Mit anderen Worten gibt es damit überabzählbar viele Versionen des Impulsoperators: Die Wahl der selbstadjungierten Erweiterung hat beobachtbare Konsequenzen und ist Teil der Spezifizierung eines physikalischen Modells.

Als weitere Beispiele unbeschränkter Operatoren betrachten wir Multiplikationsoperatoren:

Satz 2.6.13 (Multiplikationsoperatoren)**.**
Sei (M, μ) ein Maßraum mit endlichem Maß μ. Sei f eine messbare, *reellwertige* Funktion auf M, die μ-fast überall endlich ist. Der Multiplikationsoperator $T_f\colon \varphi \mapsto f\varphi$ auf $L^2(M, \mathrm{d}\mu)$ mit Definitionsbereich
$$D(T_f) = \{\varphi | f\varphi \in L^2(M, \mathrm{d}\mu)\}$$
ist selbstadjungiert. Sein Spektrum ist das *wesentliche Bild* von f, also die Menge der $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\mu(f^{-1}(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)) > 0$ für alle $\epsilon > 0$.

Beweis.
Da f reellwertig ist, ist klar, dass der Multiplikationsoperator T_f symmetrisch ist. Im Folgenden zeigen wir die Selbstadjungiertheit; die Aussage über das Spektrum ist eine Übg, vgl. [RS, VIII].

Sei $\psi \in D(T_f^*)$. Für eine gegebene Schranke $N \in \mathbb{R}_+$ setzen wir
$$\chi_N(m) := \begin{cases} 1, & \text{falls } |f(m)| \le N, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
Aus dem Satz über monotone Konvergenz folgt
$$\begin{aligned} \|T_f^*\psi\| &= \lim_{N\to\infty} \|\chi_N T_f^*\psi\| \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\sup_{\|\varphi\|=1} |\langle \varphi, \chi_N T_f^*\psi\rangle|\right) \qquad \text{[folgt aus Lemma 2.2.13]} \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\sup_{\|\varphi\|=1} |\langle T_f \chi_N \varphi, \psi\rangle|\right) \qquad \text{[Def. adjungierter Operator]} \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\sup_{\|\varphi\|=1} |\langle \varphi, \chi_N f\psi\rangle|\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \|\chi_N T_f\psi\| \qquad \text{[Lemma 2.2.13].} \end{aligned}$$
Man beachte, dass Lemma 2.2.13 für beschränkte symmetrische Operatoren gilt. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist als punktweiser Grenzwert $f\psi \in L^2(M, \mathrm{d}\mu)$ und somit $\psi \in D(T_f)$. Somit ist T_f selbstadjungiert. □

Satz 2.6.14.
Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators $A\colon D(A) \to H$ ist reell, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

(Für dicht definierte selbstadjungierte Operatoren ist das Spektrum im Allgemeinen *keine* beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$!)

Beweis.
Sei $\mu = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ nicht-reell, also $\beta \neq 0$. Nach Lemma 2.6.9 angewandt auf $\frac{1}{\beta}(A - \alpha \mathrm{id}_H)$ ist der Operator

$$(A - \mu\,\mathrm{id}_H)^{-1} = (A - \alpha\mathrm{id}_H - i\beta\,\mathrm{id}_H)^{-1} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}(A - \alpha\mathrm{id}_H) - i\,\mathrm{id}_H\right)^{-1}$$

auf ganz H definiert und stetig. Also gilt $\mu \in \rho(A)$. □

Das folgende Lemma ist zentral für den Spektralkalkül unbeschränkter Operatoren:

Lemma 2.6.15.
Sei $A\colon D(A) \to H$ ein selbstadjungierter Operator auf H. Dann ist die *Cayley-Transformierte* von A

$$U := (A - i\,\mathrm{id}_H)(A + i\,\mathrm{id}_H)^{-1}$$

ein auf ganz H definierter unitärer Operator.

Beweis.
Nach Lemma 2.6.9 ist

$$U\colon H \overset{(A+i\,\mathrm{id}_H)^{-1}}{\longrightarrow} D(A) = D(A - i\,\mathrm{id}_H) \overset{A-i\,\mathrm{id}_H}{\longrightarrow} H,$$

also ist U eine auf ganz H definierte lineare Abbildung. Aus Lemma 2.6.9.1 folgt für alle $x \in D(A)$ die Gleichheit

$$\|(A - i\,\mathrm{id}_H)(x)\| = \|(A + i\,\mathrm{id}_H)(x)\|.$$

Setzen wir $x := (A + i\,\mathrm{id}_H)^{-1}(y)$ mit $y \in H$, so folgt:

$$\|(A - i\,\mathrm{id}_H)(A + i\,\mathrm{id}_H)^{-1}(y)\| = \|y\|.$$

Also ist U eine Isometrie und insbesondere stetig. Da nach Lemma 2.6.9 auch die Umkehrabbildung

$$U^{-1} = (A + i\,\mathrm{id}_H)(A - i\,\mathrm{id}_H)^{-1}\colon H \to H$$

existiert, ist U auch surjektiv und somit unitär. □

Bemerkungen 2.6.16.
Man kann A aus seiner Cayley-Transformierten $U = (A - i\,\mathrm{id}_H)(A + i\,\mathrm{id}_H)^{-1}$ zurückgewinnen: Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$A = i(\mathrm{id}_H + U)(\mathrm{id}_H - U)^{-1}.$$

Theorem 2.6.17 (Spektralsatz - Multiplikationsoperatoren).
Sei A ein auf einem dichten Unterraum eines Hilbertraums H definierter selbstadjungierter Operator. Dann existiert ein Maßraum (M, μ) mit endlichem Maß, ein unitärer Operator

$$U\colon H \to L^2(M, \mathrm{d}\mu)$$

und eine reellwertige Funktion f auf M, die μ-fast überall endlich ist, so dass gilt

1. $v \in D(A)$ genau dann, wenn $f(\cdot)(Uv)(\cdot)\colon \big(m \mapsto f(m)(Uv)(m)\big) \in L^2(M, \mathrm{d}\mu)$.
2. Für $\psi \in U[D(A)]$ gilt $(UAU^{-1}\psi)(m) = f(m)\psi(m)$.

Beweis.

1. Wir wissen aus Korollar 2.6.10, dass die Operatoren $(A \pm i\,\mathrm{id}_H)^{-1}$ beschränkt sind. Es folgt dann sofort aus der Betrachtung 2.3.4, dass die Resolventen $R_{-i} = -(A + i\,\mathrm{id}_H)^{-1}$ und $R_i = -(A - i\,\mathrm{id}_H)^{-1}$ vertauschen.
2. Die Gleichheit für $v, w \in H$
$$\begin{aligned} & \langle (A - i\,\mathrm{id}_H)v, (A + i\,\mathrm{id}_H)^{-1}(A + i\,\mathrm{id}_H)w\rangle \\ = \; & \langle (A - i\,\mathrm{id}_H)v, w\rangle = \langle v, (A + i\,\mathrm{id}_H)w\rangle \\ = \; & \langle (A - i\,\mathrm{id}_H)^{-1}(A - i\,\mathrm{id}_H)v, (A + i\,\mathrm{id}_H)w\rangle \end{aligned}$$
zusammen mit der Tatsache, dass $\mathrm{im}(A \pm i\,\mathrm{id}_H) = H$ gilt, zeigt, dass $((A + i\,\mathrm{id}_H)^{-1})^* = (A - i\,\mathrm{id}_H)^{-1}$. Also sind die beschränkten Operatoren $(A \pm i\,\mathrm{id}_H)^{-1}$ normal, d.h. sie vertauschen mit ihrem adjungierten Operator. (Ein selbstadjungierter Operator ist trivialerweise normal.)
3. Man kann das Spektraltheorem auf beschränkte normale Operatoren ausdehnen. Dazu bemerkt man, dass ein normaler beschränkter Operator A sich schreiben lässt als $A = A_1 + iA_2$, wobei A_1 und A_2 kommutierende selbstadjungierte beschränkte Operatoren sind. Dann zeigt man eine Variante des Spektralsatzes in der Formulierung von Korollar 2.5.23 für ein N-Tupel $(A_1, A_2, \ldots, A_N)$ kommutierender beschränkter selbstadjungierter Operatoren, der die gleichzeitige Diagonalisierbarkeit kommutierender selbstadjungierter Operatoren verallgemeinert: es gibt einen endlichen Maßraum (M, μ) und beschränkte, reellwertige Borelfunktionen $(f_1, f_2, \ldots, f_N)$ auf (M, μ) und eine unitäre Abbildung
$$U\colon H \to L^2(M, \mathrm{d}\mu),$$
so dass gilt
$$(UA_iU^{-1}\varphi)(m) = f_i(m)\varphi(m).$$
Wir finden somit einen Maßraum (M, μ) mit endlichem Maß, einen unitären Operator $U\colon H \to L^2(M, \mathrm{d}\mu)$ und eine μ-messbare, beschränkte, *komplexwertige* Funktion $g(m)$, so dass
$$(*) \qquad U(A + i\ \mathrm{id}_H)^{-1}U^{-1}\varphi(m) = g(m)\varphi(m) \text{ für alle } \varphi \in L^2(M, \mathrm{d}\mu).$$
Weil der Kern $\ker(A + i\,\mathrm{id}_H)^{-1}$ trivial ist, gilt $g(m) \neq 0$ μ-fast überall. Also ist die Funktion $f(m) := \frac{1}{g(m)} - i$ μ-fast überall endlich.

4. Es sei $v \in D(A)$. Dann schreibe $v = (A + i\,\mathrm{id}_H)^{-1}w$ mit einem geeigneten $w \in H$, so dass wegen $(*)$ gilt $Uv = U(A + i\,\mathrm{id}_H)^{-1}U^{-1}Uw = gUw$. Weil die Funktion $f \cdot g$ beschränkt ist, folgt $f \cdot (Uv) = f \cdot g \cdot Uw \in L^2(M, \mathrm{d}\mu)$.

5. Sei umgekehrt $\big(m \mapsto f(m)(Uv)(m)\big) \in L^2(M, \mathrm{d}\mu)$. Finde wegen der Surjektivität von U ein $w \in H$ mit $Uw = (f + i)Uv$. Dann ist mit $f + i = \frac{1}{g}$ wie oben:

$$gUw = g(f + i)Uv = Uv.$$

Somit gilt $v = (A + i\,\mathrm{id}_H)^{-1}w$. Daher ist $v \in D(A)$ mit $Av = w - iv$ und die erste Aussage bewiesen.

6. Um die zweite Aussage zu zeigen, bemerken wir, dass wenn $v \in D(A)$ gilt, sich v in der Form $v = (A + i\,\mathrm{id}_H)^{-1}\varphi$ mit einem $\varphi \in H$ schreiben lässt. Es folgt $Av = \varphi - iv$. Es folgt

$$v = (A + i\,\mathrm{id}_H)^{-1}\varphi = U^{-1}\left(g(m)U\varphi(m)\right)$$

und somit $(**)\quad Uv(m) = g(m)U\varphi(m)$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} (UAv)(m) &= (U\varphi)(m) - i(Uv)(m) \\ &= (g(m)^{-1} - i)(Uv)(m) \qquad \text{[wegen } (**)\text{]} \\ &= f(m)(Uv)(m). \qquad \text{[Definition von } f\text{]} \end{aligned}$$

7. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Funktion f, die im dritten Schritt definiert wurde, auf M (wesentlich) reellwertig ist. Wir nehmen daher an, es würde $\mathrm{Im}(f) > 0$ auf einer Menge von positivem Maß gelten. Dann gibt es in der komplexen oberen Halbebene eine Teilmenge B, so dass $S := \{x \in M | f(x) \in B\}$ positives Maß hat. Dann ist $f\mathbf{1}_S \in L^2(M, \mathrm{d}\mu)$ und $\mathrm{Im}\langle \mathbf{1}_S, f\mathbf{1}_S\rangle = \mathrm{Im}\int_S f > 0$. Aber der Multiplikationsoperator mit f ist unitär äquivalent zu A und daher selbstadjungiert, Widerspruch. Also ist f reellwertig.

□

Wir können nun Funktionen eines selbstadjungierten Operators definieren: Für eine beschränkte Borelfunktion h auf $\mathbb{R}$ setzen wir $h(A) := U^{-1}T_{h(f)}U$. Hierbei ist $T_{h(f)}$ der Operator auf $L^2(M, \mathrm{d}\mu)$, der durch Multiplikation mit der komplexwertigen Funktion $m \mapsto h(f(m))$ wirkt. Es folgt nun:

Theorem 2.6.18 (Spektralsatz - Funktionalkalkül)**.**
Sei A ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung von den beschränkten Borelfunktionen

$$\hat{\Phi}\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L(H)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\hat{\Phi}$ ist ein unitaler $*$-Algebra Morphismus.

2. $\hat{\Phi}$ ist stetig: $\|\hat{\Phi}(h)\|_{L(H)} \leq \|h\|_\infty$.

3. Sei $h_n(x)$ eine Folge beschränkter Borelfunktionen, für die punktweise gilt $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = x$ und $|h_n(x)| \leq |x|$ für alle x und n. Dann gilt für alle $\psi \in D(A)$, dass $\lim_{n\to\infty} \hat{\phi}(h_n)\psi = A\psi$.

4. Es gelte $h_n(x) \to h(x)$ fast überall und $\|h_n\|_\infty$ sei beschränkt. Dann gilt $\hat{\Phi}(h_n) \to \hat{\Phi}(h)$ bezüglich der Norm.

$\hat{\Phi}$ hat die weiteren Eigenschaften:

5. Aus $A\psi = \lambda\psi$ folgt $\hat{\Phi}(h)\psi = h(\lambda)\psi$.

6. Aus $h \geq 0$ folgt $\hat{\Phi}(h) \geq 0$.

Bemerkungen 2.6.19. Man konstruiert dann auch wieder Spektralmaße, wobei man einen Vektor $\psi \in H$ zyklisch für A nennt, wenn der Unterraum $\{g(A)\psi | g \in C^\infty(\mathbb{R})\}$ dicht in H ist. Gibt es einen zyklischen Vektor, so lässt sich wieder H identifizieren mit $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu_\psi)$, wobei μ_ψ ein Maß ist, für das gilt

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}\mu_\psi(x) = \langle \psi, g(A)\psi \rangle,$$

und A durch Multiplikation mit x wirkt. Im allgemeinen Fall erhält man wieder direkte Summen zyklischer Unterräume und disjunkte Vereinigungen von Maßräumen. Schließlich erhält man auch wieder eine Zerlegung des Spektrums.

Wenn $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ eine μ-messbare Menge ist, so können wir wieder Projektoren $P_\Omega = \mathbf{1}_\Omega(A)$ betrachten und erhalten:

Theorem 2.6.20 (Spektralsatz - projektorwertige Maße)**.**
Die Familie $(P_\Omega)_\Omega$ der Spektralprojektionen eines selbstadjungierten Operators hat die folgenden Eigenschaften:

1. Jeder Operator P_Ω ist eine orthogonale Projektion.

2. $P_\emptyset = 0$ und $P_{(-\infty,\infty)} = \mathrm{id}_H$.

3. Gilt $\Omega = \cup_{n=1}^\infty \Omega_n$ mit $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$ für alle $n \neq m$, so gilt $P_\Omega = \lim_{N\to\infty} \sum_{n_1}^N P_{\Omega_n}$.

4. Es gilt $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$.

Bemerkungen 2.6.21.

1. Eine Familie von Projektoren, die 1. -3. erfüllt, heißt ein projektorwertiges Maß. Wir haben in 2. nicht gefordert, dass $P_{(-a,a)} = \mathrm{id}_H$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

2. Für jeden Vektor $\psi \in H$ ist $\langle \psi, P_\Omega \psi \rangle$ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Für eine beschränkte Borelfunktion g können wir daher den Operator $g(A)$ definieren durch

$$(*) \qquad \langle v, g(A)v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\mathrm{d}\langle v, P_\lambda v \rangle.$$

   Man zeigt, dass dies mit der Definition von $g(A)$ aus Theorem 2.6.18 übereinstimmt.

3. Für eine unbeschränkte Borelfunktion g setzen wir

$$D_g := \{ v \mid \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 \mathrm{d}\langle v, P_\lambda v \rangle < \infty \}.$$

   Dann ist $D_g \subseteq H$ ein dichter Unterraum, und wir definieren auf D_g den Operator $g(A)$ durch $(*)$. Wir schreiben symbolisch

$$g(A) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\mathrm{d}P_\lambda;$$

   ist die Borelfunktion g reellwertig, so ist $g(A)$ ein auf D_g definierter selbstadjungierter Operator.

Theorem 2.6.22.
Es gibt eine Bijektion zwischen selbstadjungierten Operatoren A und projektorwertigen Maßen auf H, mit

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{d}P_\lambda.$$

Für eine reellwertige Borelfunktion $g(\cdot)$ auf $\mathbb{R}$ ist

$$g(A) := \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\mathrm{d}P_\lambda$$

ein auf D_g definierter selbstadjungierter Operator. Für beschränkte Borelfunktionen stimmt $g(A)$ mit dem Operator $\hat{\Phi}(A)$ aus Theorem 2.6.18 überein.

Wir bringen nun einige Bemerkungen zur Zeitenwicklung quantenmechanischer Systeme. Sei H ein Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator mit dichtem Definitionsbereich, unter dem wir uns den Hamilton-Operator vorstellen wollen (bis auf einen konstanten Faktor). Nach Bem. 2.5.27.(4) wird ein (reiner) Zustand des quantenmechanischen Systems beschrieben durch einen Vektor $\psi \in H$ mit $\|\psi\| = 1$. Die Zeitentwicklung des Zustands soll aus dem Hamilton-Operator abgeleitet werden, von dem wir annehmen, dass er zeitlich konstant ist.

Satz 2.6.23.
Sei A ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H. Setzen wir mit Hilfe des Funktionalkalküls $U(t) := e^{itA}$, so gilt

1. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist der Operator $U(t)$ unitär und es gilt $U(t+s) = U(t)U(s)$, speziell $U(0) = \mathrm{id}_H$.
2. Für alle $\psi \in H$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{t\to t_0} U(t)\psi = U(t_0)\psi$,
speziell $\lim_{t\to 0}(U(t)\psi - U(0)\psi) = 0$.
3. Für $\psi \in D(A)$ gilt
$$\frac{1}{i}\lim_{t\to 0} \frac{U(t)\psi - U(0)\psi}{t} = A\psi.$$
4. Wenn für $\psi \in H$ der Grenzwert $\lim_{t\to 0} \frac{U(t)\psi - U(0)\psi}{t}$ existiert, dann ist $\psi \in D(A)$.

Beweis.

- Die Aussagen 1. folgen unmittelbar aus Aussagen über die beschränkte komplexwertige Borelfunktion e^{it} und dem Funktionalkalkül in Theorem 2.6.18.
- Nach dem Funktionalkalkül gilt
$$\|e^{itA}v - v\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{it\lambda} - 1|^2 \mathrm{d}\langle P_\lambda v, v\rangle.$$
Der Integrand $|e^{it\lambda} - 1|^2$ ist beschränkt durch die Funktion $g(\lambda) = 4$, die auf einem endlichen Maßraum integrierbar ist. Es gilt punktweise in λ
$$\lim_{t\to 0} |e^{it\lambda} - 1|^2 = 0;$$
nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz und dem Funktionalkalkül folgt $\lim_{t\to 0} U(t)v = v$ und somit Stetigkeit für $t_0 = 0$. Das Gruppengesetz impliziert, dass die Funktion für beliebige $t_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

- Für die dritte Aussage verwendet man die Abschätzung $|e^{ix} - 1| \leq |x|$ und ähnliche Argumente.

- Setze
$$D := \{\psi \in H | \lim_{t\to 0} \frac{U(t)\psi - \psi}{t} \text{ existiert}\}$$
und setze $iB\psi := \lim_{t\to 0} \frac{U(t)\psi-\psi}{t}$. Man rechnet nach, dass B ein symmetrischer Operator ist; insbesondere gilt $B^* \supset B$. Nach 3. gilt $B \supset A$, also $A^* \supset B^* \supset B \supset A$. Da A nach Voraussetzung selbstadjungiert ist, also $A^* = A$ gilt, folgt $A = B$.

□

Bemerkungen 2.6.24.

1. Man beachte, dass wir hier wirklich den vollen Spektralkalkül brauchen und nicht nur einen analytischen Spektralkalkül, da A in realistischen Anwendungen nicht beschränkt ist.

2. Eine operatorwertige Funktion, die den Bedingungen 1. und 2. aus Satz 2.6.23 gehorcht, heißt eine stark stetige unitäre *Einparametergruppe*.

3. Zu jeder stark stetigen unitären Einparamterergruppe $U(t)$ auf einem Hilbertraum H gibt es einen selbstadjungierten Operator A auf H, so dass $U(t) = e^{itA}$ gilt. Das besagt Stones Theorem, für das wir auf [RS, Theorem VIII.8] verweisen. Der selbstadjungierte Operator A heißt der *infinitesimale Erzeuger* von $U(t)$.

Definition 2.6.25 *Man sagt, dass zwei möglicherweise unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren A und B miteinander kommutieren genau dann wenn die Projektoren $P_A(M)$ und $P_B(N)$ für alle Borel-Mengen M, N kommutieren.*

Bemerkungen 2.6.26. Seien A und B selbst-adjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum H. Dann zeigt man, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(a) A und B kommutieren.

(b) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $e^{itA}e^{isB} = e^{isB}e^{itA}$.

Bemerkungen 2.6.27. Es reicht allerdings nicht, Kommutativität auf einer dichten Teilmenge zu prüfen.

Bemerkungen 2.6.28. Zum Abschluss möchten wir noch zeigen, dass der freie Hamilton-Operator, also der Laplace-Operator, auf $\mathbb{R}^n$ selbstadjungiert ist. Die Behandlung von anderen Hamilton-Operatoren, etwa dem des Wasserstoffatoms, erfordert weitergehende Hilfsmittel.

Satz 2.6.29.

1. Der Differentialoperator f auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n)$, der auf dem Sobolev-Raum $W^{2,2} \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ durch schwache Ableitungen definiert ist durch
$$f(\varphi) := -\Delta\varphi = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\varphi \text{ mit } D(f) := W^{2,2}(\mathbb{R}^n),$$
ist selbstadjungiert.

2. Der Abschluss des Operators f_0 mit Definitionsbereich $D(f_0) := C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ mit
$$f_0(\varphi) := -\Delta\varphi$$
ist $\bar{f_0} = f$.

3. Der Operator f ist positiv, $f \geq 0$.

4. Das Punktspektrum von f ist leer, $\sigma_p(f) = \emptyset$, und $\sigma_c(f)$ ist die abgeschlossene positive Halbachse $[0, \infty)$.

Beweis.

1. Wir zeigen zunächst, dass der Operator f symmetrisch ist: seien $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann folgt mit partieller Integration, da die Randterme nicht beitragen:
$$\begin{aligned}\langle f_0(\varphi), \psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{(-\Delta\varphi(x))}\psi(x)\mathrm{d}^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \textstyle\sum_{j=1}^n \overline{\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}}\dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}\mathrm{d}^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)} \cdot (-\Delta\psi(x))\mathrm{d}^n x = \langle\varphi, f_0(\psi)\rangle.\end{aligned}$$
Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ auch dicht im Sobolev-Raum $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ (mit der Sobolev-Norm) liegt, folgt die Symmetrie von f aus der von f_0 wie in Beispiel 2.6.2 durch Grenzübergang zu $\varphi, \psi \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$. Außerdem gilt
$$(*) \qquad \langle f(\varphi), \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\right|^2 \mathrm{d}^n x \geq 0,$$
also ist f (und f_0) positiv und 3. ist gezeigt.

2. Die Selbstadjungiertheit von f zeigen wir mit Hilfe von Korollar 2.6.11: Wir zeigen, dass für beliebiges negatives $\lambda < 0$ gilt $\mathrm{im}(f - \lambda\mathrm{id}_H) = H$.

   Sei dazu $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ beliebig; wir konstruieren ein Urbild. Man kann zeigen, dass mit ψ auch die Fouriertransformierte $\widehat{\psi}$ und die Funktion
$$\frac{1}{\|k\|^2 - \lambda}\widehat{\psi}(k)$$
mit $\|k\|$ der Norm von $k \in \mathbb{R}^n$ zum Funktionenraum $L^2(\mathbb{R}^n)$ gehören. Man überlegt sich dann, dass für $\lambda < 0$ auch die Funktion
$$\sigma(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle k,x\rangle} \frac{1}{\|k\|^2 - \lambda}\widehat{\psi}(k)\mathrm{d}k$$
im Sobolev-Raum $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ liegt und findet
$$(-\Delta - \lambda)\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle k,x\rangle} \frac{\|k\|^2 - \lambda}{\|k\|^2 - \lambda}\widehat{\psi}(k)\mathrm{d}k = \psi(x);$$
also ist σ ein Urbild von ψ unter $(f - \lambda\mathrm{id}_H)$ und es folgt $\mathrm{im}(f - \lambda\mathrm{id}_H) = H$.

3. Um zu zeigen, dass f der Abschluss des Operators f_0 ist, müssen wir nach dem Betrachtung 2.6.6 zeigen, dass der Sobolev-Raum $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ der Abschluss von $D(f_0) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_f$ mit
$$\|\varphi\|_f^2 = \|f(\varphi)\|^2 + \|\varphi\|^2$$
ist. Da der Raum glatter Funktionen mit kompaktem Träger $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Norm von $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ dicht im Sobolev-Raum $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ liegt, reicht es aus, zu zeigen, dass die Sobolev-Norm $\| - \|_{W^{2,2}}$ und die Norm $\| - \|_f$ äquivalent sind.

   Wir berechnen die erste Norm für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:
$$\begin{aligned}\|\varphi\|_f{}^2 &= \|\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\textstyle\sum_{j=1}^n \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}\|^2\\ &= \|\varphi\|^2 + \left\langle \textstyle\sum_{j=1}^n \partial_j^2\varphi, \sum_{j=1}^n \partial_j^2\varphi \right\rangle\\ &= \|\varphi\|^2 + \textstyle\sum_{j,k=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\partial_j^2\varphi(x)}\partial_k^2\varphi(x)\mathrm{d}^n x.\end{aligned}$$
   Für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ erhält man hieraus mit partieller Integration:
$$\begin{aligned}\|\varphi\|_f{}^2 &= \|\varphi\|^2 - \textstyle\sum_{j,k=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\partial_j^2\partial_k\varphi(x)}\partial_k\varphi(x)\mathrm{d}^n x\\ &= \|\varphi\|^2 + \textstyle\sum_{j,k=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\partial_j\partial_k\varphi(x)}\partial_j\partial_k\varphi(x)\mathrm{d}^n x\\ &= \|\varphi\|^2 + \textstyle\sum_{j,k=1}^n \|\partial_j\partial_k\varphi\|^2\end{aligned}$$
   und somit insgesamt
$$\|\varphi\|_f{}^2 = \|\varphi\|^2 + \sum_{j=1}^n \|\partial_j^2\varphi\|^2 + 2\sum_{j<k}\|\partial_j\partial_k\varphi\|^2,$$
   wobei hier $\|\cdot\|$ stets die Norm in $L^2(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

   Andererseits ist per Definition die Sobolev-Norm
$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{W^{2,2}}^2 &= \textstyle\sum_{|\beta|\le 2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta\varphi(x)|^2\mathrm{d}^n x\\ &= \|\varphi\|^2 + \textstyle\sum_{1\le|\beta|\le 2} \|\partial^\beta\varphi\|^2\\ &= \|\varphi\|^2 + \textstyle\sum_{j=1}^n \|\partial_j^2\varphi\|^2 + 2\sum_{j<k}\|\partial_j\partial_k\varphi\|^2 + \sum_{j=1}^n \|\partial_j\varphi\|^2.\end{aligned}$$
   Der direkte Vergleich liefert also die erste Abschätzung für die Normen
$$\|\varphi\|_f{}^2 \le \|\varphi\|_{W^{2,2}}^2.$$
   Andererseits gilt für die Sobolev-Norm
$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{W^{2,2}}^2 &= \|\varphi\|_f{}^2 + \textstyle\sum_{j=1}^n \|\partial_j\varphi\|^2\\ &= \|\varphi\|_f{}^2 + \textstyle\sum_{j=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_j\varphi(x)|^2\mathrm{d}^n x\\ &\overset{(*)}{=} \|\varphi\|_f{}^2 + \langle f(\varphi), \varphi\rangle\\ &\overset{\text{CS}}{\le} \|\varphi\|^2 + \|f(\varphi)\|^2 + \|f(\varphi)\|\cdot\|\varphi\|.\end{aligned}$$
   Da für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ stets $\alpha\beta \le \alpha^2 + \beta^2$ gilt, folgt die zweite Abschätzung
$$\|\varphi\|_{W^{2,2}}^2 \le 2(\|\varphi\|^2 + \|f(\varphi)\|^2) = 2\,\|\varphi\|_f{}^2\,.$$
   Es folgt, dass die Normen $\|\quad\|_{W^2}$ und $\|\quad\|_f$ äquivalent sind, und damit der Operator f der Abschluss von f_0 ist.

4. Wir wollen nun das Spektrum von f untersuchen. Da f selbstadjungiert ist, ist nach Satz 2.6.14 das Spektrum reell, $\sigma(f) \subseteq \mathbb{R}$. Wir betrachten zunächst das Punktspektrum. Ist $\lambda \in \sigma_p(f)$, so gibt es eine Eigenfunktion $\varphi \in D(f)$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $f(\varphi) = \lambda\varphi$. Es folgt

$$\langle \varphi, f(\varphi) \rangle = \lambda \|\varphi\|^2 = \lambda.$$

Wegen der Positivität von f ist die linke Seite nicht-negativ, so dass $\lambda \geq 0$ gelten muss.

Die Fouriertransformation erhält die L^2-Norm; daher gilt für eine normierte Eigenfunktion $\varphi \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$

$$\|\hat{\varphi}\|^2 = \|\varphi\|^2 = 1.$$

Fouriertransformation führt Differentiation in Multiplikation über; daher folgt aus der Eigenwertgleichung $f(\varphi) = \lambda\varphi$ die Gleichung

$$\|x\|^2 \hat{\varphi}(x) = \lambda \hat{\varphi}(x),$$

also

$$(\|x\|^2 - \lambda)\hat{\varphi}(x) = 0.$$

Für $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ folgt daraus $\hat{\varphi} = 0$ fast überall. Dem widerspricht aber $\|\hat{\varphi}\| = 1$. Also gibt es kein $\lambda \geq 0$ mit $\lambda \in \sigma_p(f)$.

5. Wir kommen nun zum nicht diskreten Spektrum: Für $\lambda < 0$ hatten wir schon in 2. gezeigt, dass

$$\mathrm{im}(f - \lambda \mathrm{id}_H) = L^2(\mathbb{R}^n) = H$$

gilt.

Gilt $\lambda \in \sigma_c(f)$, dann ist der Operator $f - \lambda \mathrm{id}_H$ injektiv, es existiert also ein Umkehroperator

$$(f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1} \colon L^2(\mathbb{R}^n) \to D(f).$$

Wir zeigen zunächst, dass der Operator $(f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}$ für $\lambda < 0$ abgeschlossen ist: sei $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $D((f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}) = L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k = \varphi \text{ und } \lim_{k \to \infty} (f - \lambda \mathrm{id})^{-1}(\varphi_k) = \psi.$$

Dann ist wegen $D((f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}) = L^2(\mathbb{R}^n)$ ohnehin klar, dass $\varphi \in D((f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1})$ gilt. Um

$$(f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}(\varphi) = \psi$$

zu zeigen, setzen wir $\psi_k := (f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}(\varphi_k)$; dann ist

$$\psi_k \in D(f - \lambda \mathrm{id}_H) = D(f).$$

Es gilt

$$\lim_{k \to \infty} (f - \lambda \mathrm{id}_H)(\psi_k) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k = \varphi$$

und aus $\lim_{k \to \infty} \psi_k = \psi$ folgt somit

$$(**) \qquad \lim_{k \to \infty} f(\psi_k) = \varphi + \lambda\psi.$$

Nun ist f selbstadjungiert, also nach Satz 2.5.4 also abgeschlossen. Aus $\lim_{k \to \infty} \psi_k = \psi$ und (**) folgt daher $f(\psi) = \varphi + \lambda\psi$, also $(f - \lambda \mathrm{id}_H)(\psi) = \varphi$ und damit $(f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}(\varphi) = \psi$. Also ist der Operator $(f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}$ mit $D((f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}) = L^2(\mathbb{R}^n)$ abgeschlossen.

6. Wir hatten bereits in Bem. 2.5.5 bemerkt, dass eine abgeschlossene lineare Abbildung von Banachräumen automatisch auch stetig ist. Also ist für $\lambda < 0$ immer $\lambda \in \rho(f)$, und wir haben gezeigt, dass $\sigma(f) = \sigma_c(f) \subseteq [0, \infty)$.

   [Am Beispiel des abgeschlossenen Operators $(f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}$ mit $D((f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}) = H = L^2(\mathbb{R}^n)$ können wir das entsprechende (ÜA-)Argument für die Stetigkeit so nachtragen: Es ist $L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ mit der Maximum-Norm

   $$\|(\varphi, \psi)\| := \max\{\|\varphi\|, \|\psi\|\} \text{ für } \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

   ein Banachraum; darin ist der Graph des abgeschlossenen Operators $(f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}$ für $\lambda < 0$

   $$G := \{(\varphi, (f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}(\varphi)) | \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

   ein abgeschlossener Untervektorraum, also selbst ein Banachraum.

   Die Projektion

   $$p_1 \colon G \to L^2(\mathbb{R}^n) \text{ mit } p_1(\varphi, (f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}(\varphi)) := \varphi$$

   ist linear, stetig und bijektiv. Nach Korollar 2.2.21 zum Satz von der offenen Abbildung ist

   $$p_1^{-1} \colon L^2(\mathbb{R}^n) \to G, \varphi \mapsto (\varphi, (f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}(\varphi))$$

   stetig, also ist auch der Operator $(f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}$ stetig.]

7. Wir müssen zeigen, dass jede positive reelle Zahl $\lambda \in [0, \infty)$ zu $\sigma_c(f)$ gehört. Die Idee ist, für jedes $\lambda \geq 0$ eine Folge $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Wellenpaketen in $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ anzugeben, für die gilt

   $$(***) \quad (\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ besitzt keine konvergente Teilfolge, und } \lim_{j \to \infty} (f - \lambda \mathrm{id}_H)(\varphi_j) = 0.$$

   Würde nun $(f - \lambda \mathrm{id}_H)^{-1}$ als stetiger Operator existieren, so würde aus der zweiten Aussage folgen, dass $\lim_{j \to \infty} \varphi_j = 0$ gilt. Das widerspricht aber der ersten Aussage.

   Um eine solche solche Funktionenfolge zu finden, wählen wir

   - eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{j \to \infty} \varepsilon_j = 0$.
   - eine Glättungsfunktion $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\psi\| > 0$ und
   - eine Folge $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{j \to \infty} \|z_j\| = \infty$, so dass die Träger der Funktionen

     $$\begin{array}{rcl} \psi_j \colon \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{C}, \\ \psi_j(x) & := & \psi(\varepsilon_j(x - z_j)) \end{array}$$

     paarweise disjunkt sind.

   Wir wählen $k \in \mathbb{R}^n$ mit $\|k\|^2 = \lambda \geq 0$ und setzen

   $$\varphi_j(x) := \varepsilon_j^{\frac{n}{2}} \cdot \psi(\varepsilon_j(x - z_j)) \cdot \exp(i\langle k, x\rangle).$$

   Dann ist $\varphi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

   $$\|\varphi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \varepsilon_j^n \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\varepsilon_j(x - z_j))|^2 \mathrm{d}^n x = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(y)|^2 \mathrm{d}^n y = \|\psi\|^2 > 0.$$

   Da die Funktionen φ_j und φ_k (wie ψ_j und ψ_k) für $j \neq k$ nach Konstruktion disjunkte Träger haben, ist ihr Skalarprodukt in $L^2(\mathbb{R}^n)$ gleich 0; es folgt

   $$\|\varphi_j - \varphi_k\|^2 = \|\varphi_j\|^2 + \|\varphi_k\|^2 = 2\|\psi\|^2 > 0$$

mit der positiven Konstante $\|\psi\|^2$, so dass die Funktionenfolge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge haben kann.

Ferner ist

$$\varepsilon_j^{\frac{n}{2}}\psi(\varepsilon_j(x-z_j))\cdot\Delta\left(\exp\left(i\langle k,x\rangle\right)\right)=$$

$$=-\lambda\varepsilon_j^{\frac{n}{2}}\psi(\varepsilon_j(x-z_j))\exp\left(i\langle k,x\rangle\right)=-\lambda\varphi_j(x),$$

wegen $\sum_{m=1}^n(ik_m)^2=-\lambda$. Für $f=-\Delta$ folgt nach der Leibnizregel für die zweite Ableitung:

$$((f-\lambda\mathrm{id})(\varphi_j))(x)=$$

$$=\varepsilon_j^{\frac{n}{2}}\left[-\Delta\psi(\varepsilon_j(x-z_j))-2\sum_{m=1}^n\frac{\partial\psi}{\partial x_m}(\varepsilon_j(x-z_j))ik_m\right]\cdot\exp\left(i\langle k,x\rangle\right).$$

Wir verwenden nun die Dreiecksungleichung für die Norm in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und führen anschließend die Substitution $y:=\varepsilon_j(x-z_j)$ aus. Es folgt

$$\|(f-\lambda\mathrm{id})(\varphi_j)\|\leq\varepsilon_j^2\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\Delta_y\psi(y)|^2\mathrm{d}^ny\right)^{\frac{1}{2}}+2\sqrt{\lambda}\varepsilon_j\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^n\left|\frac{\partial\psi(y)}{\partial y_m}\right|^2\mathrm{d}^ny\right)^{\frac{1}{2}};$$

auf der rechten Seite hängt nur noch ε_j vom Index j ab. Diese Folge geht gegen Null, also gilt auch

$$\lim_{j\to\infty}(f-\lambda\mathrm{id}_H)(\varphi_j)=0,$$

Die Funktionenfolge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ hat also die beiden in $(***)$ geforderten Eigenschaften.

□

Literatur

[Ah] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1979.

[FL] Wolfgang Fischer und Ingo Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg, Wiesbaden, 2005

[F3] Otto Forster, *Analysis 3*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011

[H] Harro Heuser, *Funktionalanalysis*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2006

[H01] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis 1*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2006

[Koe] Max Koecher, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Springer, Grundwissen Mathematik, Band 2, 1983

[K2] Konrad Königsberger, *Analysis 2*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2004

[RS] Michael Reed und Barry Simon, *Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1972

[R1] Reinhold Remmert, *Funktionentheorie 1*, Springer, Berlin/Heidelberg

[Sa] D.A. Salamon *Funktionentheorie*, Birkhäuser Verlag, Grundstudium Mathematik, Basel, 2012. (Manuskript ist auf Homepage des Autors verfügbar)

[T] Hans Triebel, *Höhere Analysis*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.

[W] Dirk Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2007

Index