Mathematik II für Studierende der Physik

Vorlesungsskript*

V. Cortés, R. Holtkamp, U. Kühn, B. Siebert, T. Leistner
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
www.math.uni-hamburg.de/home/holtkamp

Hamburg, Sommersemester 2012

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

*Version vom 13. Juli 2012

1 Diagonalisierung von Endomorphismen

1.1 Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum

Eigenwerte, Eigenvektor und Eigenraum

Definition 1. *Sei F ein Endomorphismus eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, d.h. $F : V \to V$ ist $\mathbb{K}$-linear.*

- $\lambda \in \mathbb{K}$ *heißt Eigenwert von F, wenn es einen Vektor $0 \neq v \in V$ gibt, so dass*
$$F(v) = \lambda v.$$
- *Jeder solche Vektor heißt Eigenvektor von F zum Eigenwert λ.*
- *Der Unterraum von V definiert durch*
$$V_\lambda := \{v \in V | F(v) = \lambda v\}$$
heißt Eigenraum von F zum Eigenwert λ.

Beispiel 1:
Sei $V = \mathbb{R}^2$ und
$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(V).$$
$e_1 + e_2$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1,
$e_1 - e_2$ zum Eigenwert -1,
$V_1 = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$, $V_{-1} = \mathbb{R}(e_1 - e_2)$,
Da $V = V_1 \oplus V_{-1}$, hat F keine weiteren Eigenwerte.

Beispiel 2:
Die lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, gegeben durch die Matrix
$$D_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$
ist eine Drehung um den Winkel φ und hat daher hat *keine reellen Eigenwerte*, falls φ kein ganzzahliges Vielfaches von π ist. [2mm] Zum Beispiel ist $D_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und die Eigenwertgleichung liefert
$$D_{\pi/2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$
d.h. $-y = \lambda x$ und $x = \lambda y$. Dies impliziert aber $x = -\lambda^2 x$ und $y = -\lambda^2 y$. Wegen $\lambda^2 \geq 0$ ergibt dies $x = y = 0$.

1.2 Charakteristisches Polynom

Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom dient zur Bestimmung der Eigenvektoren.

Verabredung. Wir nehmen im Folgenden an, dass $\mathbb{K}$ ein unendlicher Körper ist. Dann brauchen wir zwischen Polynomen $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ und polynomialen Funktionen $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ nicht zu unterscheiden.

Definition 2 (Charakteristisches Polynom)**.** *Sei V ein $\mathbb{K}$-VR der Dimension $n < \infty$ und $F \in \mathrm{End}(V)$.*

Das charakteristische Polynom $P_F : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $t \mapsto P_F(t)$, von F ist definiert durch

$$\begin{aligned} P_F(t) &:= \det(F - t\mathrm{Id}) = \det(A - t\mathbf{1}_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(a_{1\sigma(1)} - t\delta_{1\sigma(1)}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_{n\sigma(n)} - t\delta_{n\sigma(n)}\right), \end{aligned}$$

wobei $A = (a_{ij})_{i,j}$ die darstellende Matrix von F bezüglich (irgend)einer Basis von V ist.

Wie sieht das charakteristische Polynom aus?

Satz 1. *Das charakteristische Polynom von $F \in \mathrm{End}(V)$ hat Grad $n = \dim V$.*

Schreibt man

$$P_F(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$$

mit Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{K}$, die von F abhängen, dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \det F = \det A. \\ \alpha_{n-1} &= (-1)^{n-1} (a_{11} + \cdots + a_{nn}) \\ \alpha_n &= (-1)^n, \end{aligned}$$

wobei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix von F ist.

Die Summe der Diagonalelemente von A heißt auch $\mathrm{spur}(F) = \mathrm{spur}(A) := a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

Beweis. Das Polynom $(a_{1\sigma(1)} - t\delta_{1\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot (a_{n\sigma(n)} - t\delta_{n\sigma(n)})$ hat für jede Permutation $\sigma \neq \mathrm{Id}$ einen Grad $\leq n-2$, da dann mindestens zwei $\delta_{i\sigma(i)}$ gleich 0 sind.

Daher gilt

$$P_F(t) = (a_{11} - t) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - t) + Q(t)$$

mit einem Polynom $Q(t)$ vom Grad $\leq n-2$.

Ausmultiplizieren liefert nun:

$$P_F(t) = (-t)^n + (-t)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn}) + \cdots + P_F(0)$$

mit $P_F(0) = \det(F - 0 \cdot \mathrm{Id}) = \det F$.

□

Charakteristisches Polynom und Eigenwerte

Satz 2. *Sei V ein endlichdimensionaler VR und $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:*

Die Eigenwerte von F sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von F.

Beweis.
$\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Eigenwert von F, wenn es einen Vektor $0 \neq v \in V$ gibt mit $F(v) = \lambda v$, d.h. wenn $\ker(F - \lambda \mathrm{Id}) \neq 0$.

Dies ist gleichbedeutend mit $\det(F - \lambda \mathrm{Id}) = P_F(\lambda) = 0$. □

1.3 Diagonalisierbarkeit

Diagonalisierbarkeit

Definition 3. *Sei V ein $\mathbb{K}$-VR der Dimension n.*

$F \in \mathrm{End}(V)$ heißt diagonalisierbar, wenn es eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V gibt, so dass die darstellende Matrix von F Diagonalgestalt hat:

$$M_B(F) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \textit{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

Bemerkung
Die Basisvektoren b_i sind dann Eigenvektoren von F und die Diagonaleinträge λ_i sind die zugehörigen Eigenwerte λ_i.

F ist also genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren gibt.

Charakteristisches Polynom und Diagonalisierbarkeit

Satz 3. *Das charakteristische Polynom eines diagonalisierbaren Endomorphismus F zerfällt in Linearfaktoren.*

Beweis. Aus $M_B(F) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ folgt

$$\begin{aligned} P_F(t) &= \det(\mathrm{diag}(\lambda_1 - t, \dots, \lambda_n - t)) \\ &= (\lambda_1 - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - t) \\ &= (-1)^n (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n). \end{aligned}$$

□

Bemerkung
Die Umkehrung des Satzes gilt nicht immer, wie wir gleich sehen werden.

Beispiel 1
Sei

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^2).$$

$P_F(t) = (t-1)^2$ zerfällt in Linearfaktoren, aber F ist nicht diagonalisierbar: 1 ist der einzige Eigenwert und $V_1 = \mathbb{K}e_1$.

Es gibt also keine Basis aus Eigenvektoren.

Beispiel 2
Sei

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^2).$$

Dann gilt $P_F(t) = t^2 + 1$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hat $P_F(t)$ keine Nullstellen und zerfällt also nicht in Linearfaktoren.

Insbesondere ist F nicht diagonalisierbar. Wir haben schon gesehen, dass F die 90°-Drehung ist und deshalb keine Eigenvektoren hat.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zerfällt $P_F(t) = t^2 + 1 = (t+i)(t-i)$.

Darüber hinaus ist F diagonalisierbar (mit komplexen Eigenwerten):

$$\begin{aligned} F(e_1 - ie_2) &= e_2 + ie_1 = i(e_1 - ie_2) \\ F(e_1 + ie_2) &= e_2 - ie_1 = -i(e_1 + ie_2). \end{aligned}$$

Multiplizität der Nullstellen des char. Polynoms

Ist λ eine Nullstelle eines Polynoms $P(t)$, so kann man P schreiben als

$$P(t) = (t-\lambda)^m Q(t)$$

mit einem Polynom Q mit $Q(\lambda) \neq 0$, und m heißt Multiplizität von λ.

Definition 4 (Multiplizität der Nullstellen des char. Polynoms)**.** *Sei F ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums V mit Eigenwert λ.*

Die Multiplizität m_λ von λ ist definiert durch

$$P_F(t) = (t-\lambda)^{m_\lambda} Q(t), \text{ wobei } Q \in \mathbb{K}[t] \text{ mit } Q(\lambda) \neq 0.$$

Multiplizität und Dimension des Eigenraumes

Satz 4. *Es sei V_λ der Eigenraum zu λ und $n_\lambda := \dim V_\lambda$, dann gilt*

$$n_\lambda \leq m_\lambda.$$

Beweis. Sei $B_\lambda = (b_1, \dots, b_{n_\lambda})$ eine Basis des Eigenraums V_λ.

Nach dem Basisergänzungssatz können wir B_λ zu einer Basis B von V ergänzen.

Dann gilt

$$M_B(F) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \mathbf{1}_{n_\lambda} & * \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei D eine quadratische Matrix ist.

Daraus ergibt sich $P_F(t) = (-1)^{n_\lambda}(t-\lambda)^{n_\lambda} P_D(t)$ und somit $n_\lambda \leq m_\lambda$. □

Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren

Satz 5. *Sei V ein VR, $F \in \operatorname{End}(V)$ und v_i, $i = 1, \ldots, k$, seien Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten λ_i.*

Dann sind $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach k.

IA: Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen.

IV: Sei $k \geq 2$, und es gelte dass $k-1$ Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}$ zu verschiedenen Eigenwerten λ_i linear unabhängig sind.

IS: Seien $v_1, \ldots, v_k$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten λ_i. Wir müssen zeigen, dass die v_i linear unabhängig sind.

Weiter im Beweis:

Angenommen, es gelte $0 = \sum_{i=1}^k c_i v_i$, so folgt folgt einerseits

$$0 = \sum_{i=1}^k \lambda_k c_i v_i$$

und andererseits durch Anwendung von F

$$0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i v_i.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$0 = \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{(\lambda_k - \lambda_i)}_{\neq 0} c_i v_i$$

und somit (wegen der IV) $c_i = 0$ für $i = 1, \ldots, k-1$.

Es folgt $0 = \sum_{i=1}^k c_i v_i = c_k v_k$ und somit auch $c_k = 0$. □

Erinnerung/Nachtrag:

Definition 5 (Direkte Summe von mehr als zwei Unterräumen)**.** *Sei V ein VR und $V_1, V_2, \ldots, V_k \subset V$ Unterräume mit der Eigenschaft*

$$V_i \cap \operatorname{span}\Big\{\bigcup_{j \neq i} V_j\Big\} = \{0\} \;\forall\; i$$

Die direkte Summe der V_i's ist dann der Unterraum

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k := \{v_1 + v_2 + \cdots + v_k | v_i \in V_i, i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Es gilt:

- Jeder Vektor $v \in V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ hat eine eindeutige Darstellung $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ mit $v_i \in V_i$
- $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k = (\cdots((V_1 \oplus V_2) \oplus V_3) \oplus \cdots \oplus V_{k-1}) \oplus V_k$.

Diagonalisierbarkeit und Aufspaltung in Eigenräume

Satz 6. *Sei V ein endlichdimensionaler VR und $F \in \mathrm{End}(V)$.*

F ist diagonalisierbar

$\iff$ Das charakteristische Polynom P_F zerfällt in Linearfaktoren und $m_\lambda = n_\lambda$ für alle Eigenwerte λ

$\iff$ $V = \bigoplus_{\lambda\ EW} V_\lambda$, d.h. V ist direkte Summe von Eigenräumen.

Beweis. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ seien die verschiedenen Eigenwerte von F und $U = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i} \subset V$ die (nach dem Satz über Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten direkte) Summe der Eigenräume.

Sei B_U eine Basis von U. Nach dem Austauschlemma können wir B_U zu einer Basis B von V ergänzen.

Weiter im Beweis:

Die darstellende Matrix von F bezüglich B hat dann die Gestalt

$$M_B(F) = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei A die darstellende Diagonalmatrix der Einschränkung $F|_U$ (bezüglich B_U) ist und D eine $(m \times m)$-Matrix ist, $m := \dim V - \dim U$.

Daraus folgt für das charakteristische Polynom von F

$$P_F(t) = P_A(t)Q(t),$$

wobei $Q(t) = P_D(t)$, falls $m > 0$ und $Q(t) = 1$, falls $m = 0$.

Nun gilt: F diagonalisierbar $\iff$ $U = V \iff$ $m = 0$ $\iff$ $P_F(t) = P_A(t) = (\lambda_1 - t)^{n_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - t)^{n_{\lambda_k}}$. □

2 Euklidische und Hermitesche Vektorräume

2.1 Bilinearformen

Euklidische und Hermitesche Vektorräume

Dies sind Vektorräume, die mit einer zusätzlichen Struktur ausgestattet sind, nämlich mit einem Skalarprodukt, mit dessen Hilfe wir geometrische Größen wie Abstand, Länge und Winkel definieren können.

Erinnerung: Linearformen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- Der Vektorraum

$$V^* := L(V, \mathbb{K}) = \{L : V \to \mathbb{K} \mid L \text{ ist } \mathbb{K}\text{-linear}\}$$

heißt *Dualraum* zu V oder auch Raum der *Linearformen*.

- Hat V die Dimension n, so auch V^*. Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so ist $v_1^*, \ldots, v_n^*$, definiert durch

  $$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases},$$

  eine Basis von V^*. Diese Basis heißt die zu $(v_1, \ldots, v_n)$ duale Basis.

Bi- und Multilinearformen

Definition 6. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

- *Eine Abbildung $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt Bilinearform, wenn Sie linear in beiden Argumenten ist, d.h. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ und $a, b \in \mathbb{K}$ gilt:*

  $$\begin{aligned} \beta(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) &= a\beta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b\beta(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \text{ und} \\ \beta(\mathbf{z}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) &= a\beta(\mathbf{z}, \mathbf{x}) + b\beta(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

- *Eine Abbildung*

  $$\begin{aligned} \mu : V^k = V \times \cdots \times V &\to \mathbb{K} \\ (v_1, \ldots, v_k) &\mapsto \mu(v_1, \ldots, v_k) \end{aligned}$$

  heißt Multilinearform (genauer k-Linearform), wenn μ in jedem der k Argumente linear ist.

Beispiele

- Linearformen sind 1-Linearformen

  Beispielsweise ist $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ eine Linearform auf dem VR der integrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$.

- Sei $V = C^0([a, b])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$. Dann definiert $(f, g) \mapsto \int_a^b f(x) \cdot g(x)dx$ eine Bilinearform auf V.

- Die Determinante $\det : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$ ist n-linear.

Symmetrische und schiefymmetrische Bilinearformen

Definition 7. *Eine Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt*

- *symmetrisch, wenn*

  $$\beta(v, w) = \beta(w, v) \quad \text{für alle} \quad v, w \in V.$$

- *schiefsymmetrisch, wenn*

  $$\beta(v, w) = -\beta(w, v) \quad \text{für alle} \quad v, w \in V.$$

- *nicht entartet, wenn die lineare Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} V & \to & V^* \\ v & \mapsto & \beta(v, \cdot) \end{array}$$

injektiv ist (d.h. wenn $v = 0$ der einzige Vektor ist, für den $\beta(v, w) = 0$ für alle $w \in V$).

Definition 8. *Sei* $\dim V = n$, $\alpha : V \times V \to \mathbb{K}$ *eine Bilinearform und* $B = (b_1, \ldots, b_n)$ *eine Basis von V. Die darstellende Matrix von α ist die $(n \times n)$-Matrix A mit den Einträgen*

$$\alpha_{ij} := \alpha(b_i, b_j).$$

Bemerkungen/ÜA

- A^t ist die darstellende Matrix der linearen Abbildung $V \ni v \mapsto \alpha(v, \cdot) \in V^*$ bezüglich der gegebenen Basis von V und der dazu dualen Basis.
- α ist genau dann nicht entartet, wenn A invertierbar ist.
- α ist genau dann symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch, wenn A symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch ist, d.h. wenn $A = A^t$ bzw. $A = -A^t$. Der Raum der symmetrischen (bzw. schiefsymmetrischen) Bilinearformen bildet einen Vektorraum über $\mathbb{K}$ der Dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ (bzw. $\frac{n(n-1)}{2}$).

2.2 Euklidische Vektorräume

Euklidische Vektorräume

Definition 9 (Euklidisches Skalarprodukt/Euklidischer Vektorraum)**.** *Sei V ein reeller VR. Eine symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt positiv definit, wenn für alle $v \in V$, $v \neq 0$ gilt*

$$\langle v, v \rangle > 0.$$

Ein (Euklidisches) Skalarprodukt auf V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform $V \times V \to \mathbb{R}$.

Ein Euklidischer Vektorraum ist ein reeller VR zusammen mit einem Skalarprodukt darauf.

Bemerkung
Skalarprodukte sind nicht entartet, denn aus $\langle v, v \rangle = 0$ folgt $v = 0$.

Beispiel
Das *kanonische Skalarprodukt* von $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

wobei $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ und $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Die darstellende Matrix des kanonischen Skalarprodukts von $\mathbb{R}^n$ bezüglich der kanonischen Basis ist die Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n$, denn

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Geometrische Größen 1: Länge und Abstand

Definition 10. *Sei V ein Euklidischer VR.*

- *Die Länge (auch Norm) eines Vektors $v \in V$ ist die Zahl*

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

- *Der Abstand $d(x, y)$ zweier Punkte $x, y \in V$ ist die Länge des Vektors $y - x$:*

$$d(x, y) := \|y - x\|.$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung ist fundamental in der Geometrie. Sie erlaubt es u.a., Winkel zu definieren.

Satz 7 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Sei V ein Euklidischer VR. Dann gilt für alle $v, w \in V$:*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis. Wir können annehmen, dass $v \neq 0$ und $w \neq 0$, denn sonst ist nichts zu zeigen.

Weiter im Beweis:

Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq \langle \lambda v + \mu w, \lambda v + \mu w \rangle = \lambda^2 \|v\|^2 + \mu^2 \|w\|^2 + 2\lambda\mu \langle v, w \rangle.$$

Einsetzen von $\lambda = \sqrt{\frac{\|w\|}{\|v\|}}$ und $\mu = \pm\sqrt{\frac{\|v\|}{\|w\|}}$ liefert

$$0 \leq 2\|v\|\|w\| \pm 2\langle v, w \rangle,$$

d.h. $\pm\langle v, w \rangle \leq \|v\|\|w\|$, und damit die CS-Ungleichung. Gleichheit gilt genau dann, wenn für eine dieser beiden Wahlen $\lambda v + \mu w = 0$, d.h. wenn v und w linear abhängig sind. $\square$

Geometrische Größen 2: Winkel und Orthogonalität

Definition 11. *Sei V ein Euklidischer VR und $v, w \in V \setminus 0$.*

- *Der Winkel $\angle(v,w)$ zwischen v und w ist definiert als*
$$\angle(v,w) := \arccos \underbrace{\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|}}_{\in[-1,1]} \in [0,\pi].$$
- *Man sagt, dass $v, w \in V$ senkrecht aufeinander stehen oder orthogonal sind, wenn*
$$\langle v,w\rangle = 0$$
und schreibt dafür $v \perp w$.
- *Für jeden Unterraum $U \subset V$ heißt der UR*
$$U^\perp := \{v \in V | v \perp U\}$$
das orthogonale Komplement von U in V.

Orthogonales Komplement

Zu jedem Unterraum in einem Euklidischen Vektorraum gibt es ausgezeichnetes Komplement.

Satz 8. *Sei β eine nicht entartete Bilinearform auf einem n-dimensionalen VR V und $U \subset V$ ein Unterraum.*

(i) Dann hat der Unterraum $U' := \{v \in V \mid \beta(u,v) = 0 \ \forall u \in U\}$ die Dimension $n - \dim U$.

(ii) Die Unterräume U und U' sind genau dann komplementär, d.h. $V = U \oplus U'$, wenn $U \cap U' = 0$.

Folgerung 9. *Sei $U \subset V$ ein Unterraum eines endlichdimensionalen Euklidischen Vektorraums. Dann ist $U^\perp$ ein Komplement zu U in V, d.h. $V = U \oplus U^\perp$.*

Beweis. (der Folgerung) $U \cap U^\perp = \{0\}$ gilt, denn $v \in U \cap U^\perp$ impliziert $\langle v,v\rangle = 0$ und somit $v = 0$. □

Beweis des Satzes:

Sei $(u_1,\dots,u_r)$ eine Basis von U, $(u_1,\dots,u_n)$ eine Basis von V. Der Unterraum U' ist genau der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems
$$\beta(u_i, \sum x_j u_j) = \sum_{j=1}^n \beta(u_i,u_j)x_j = \sum_{j=1}^n \beta_{ij}x_j = 0, \quad \text{für alle} \quad i = 1,\dots,r.$$
Da β nicht entartet ist, ist die Abbildung $U \ni u \mapsto \beta(u,.) \in V^*$ injektiv. Somit hat die Matrix $(\beta_{ij})_{i=1,\dots,r, j=1,\dots,n}$ vollen Rang r. Damit ist die Dimension des Lösungsraumes U' gleich $\dim V - r$.

(ii) folgt aus (i) und der Dimensionsformel:
$$\begin{aligned}\dim(U+U') &= \dim U + \dim U' - \dim(U \cap U') \\ &\overset{(i)}{=} \dim V - \dim(U \cap U').\end{aligned}$$
□

2.3 Orthonormale Basen

Orthonormale Basen

In Euklidischen Vektorräumen gibt es ausgezeichnete Basen.

Definition 12. *Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein n-dimensionaler Euklidischer VR.*

(i) Eine Vektor $v \in V$ heißt Einheitsvektor, wenn $\|v\| = 1$.

(ii) Eine Basis $(w_1, \ldots, w_n)$ von V aus n Einheitsvektoren $w_i \in V$, die orthogonal zueinander sind, heißt Orthonormalbasis (kurz: ONB).

Beispiel
Die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ ist orthonormal (bzgl. des kanonischen Skalarproduktes).

Die Komponenten eines Vektors $v \in V$ in einer ONB $(w_1, \ldots, w_n)$ sind gegeben durch $\langle v, w_i \rangle$, d.h.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_i \rangle w_i.$$

Satz 10. *Sei V ein Euklidischer VR und $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von orthogonalen Vektoren $v_i \in V$ mit $v_i \neq 0$, d.h.*

$$v_i \perp v_j \quad \textit{für alle} \quad i \neq j.$$

Dann ist $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

Insbesondere ist in einem n-dimensionalen Vektorraum jede Familie aus n orthogonalen Einheitsvektoren eine Orthonormalbasis.

Beweis.
Sei $0 = \sum_{j \in J} \lambda_j v_j$, wobei $J \subset I$ eine endliche Teilmenge ist und $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Daraus folgt für alle $i \in J$

$$0 = \langle v_i, \sum_{j \in J} \lambda_j v_j \rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = \lambda_i \|v_i\|^2$$

und somit $\lambda_i = 0$. □

Orthonormalisierungsverfahren

Satz 11 (Gram-Schmidt)**.** *Jeder endlich-dimensionale Euklidische Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach $n = \dim V \in \mathbb{N}$.

- Falls $\dim V = 1$, so existiert $v \neq 0$ und $w_1 := \frac{v}{\|v\|}$ ist eine ONB.
- Wir nehmen an, dass jeder Euklidische VR der Dimension $< n$ eine ONB hat und zeigen, dass dann auch jeder n-dimensionale Euklidische VR eine ONB hat.
- Sei $v \in V$, $v \neq 0$. Nach Induktion besitzt der $(n-1)$-dimensionale UR $v^\perp := (\mathbb{R}v)^\perp$ eine ONB $(w_2, \ldots, w_n)$. Durch $w_1 := \frac{v}{\|v\|}$ wird diese zu einer ONB von V ergänzt.

□

2.4 Normierte Vektorräume

Normierte Vektorräume

Definition 13. *Sei V ein $\mathbb{K}$-VR, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Eine Norm auf V ist eine Abbildung

$$\| \cdot \| : V \to [0, \infty), \quad v \mapsto \|v\|,$$

mit folgenden Eigenschaften:

N1) Für $v \in V$ gilt genau dann $\|v\| = 0$, wenn $v = 0$.

N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$ (Dreiecksungleichung).

Ein normierter Vektorraum ist ein reeller oder komplexer VR zusammen mit einer Norm darauf.

Satz 12. *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Dann wird durch*

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad v \in V,$$

(wirklich) eine Norm $\|\cdot\|$ auf V definiert; und damit ist jeder Euklidische Vektorraum ein normierter Vektorraum.

Beweis.
N1) folgt daraus, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit ist.
N2) folgt aus der Bilinearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle = \lambda^2 \|v\|^2$.
N3) folgt aus der Bilinearität und der CS-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2. \quad \square \end{aligned}$$

2.5 Hermitesche Vektorräume

Hermitesche Vektorräume

Um auf $\mathbb{C}$-Vektoräumen geometrische Größen einführen zu können, benötigt man ein Hermitesches Skalarprodukt.

Definition 14. *Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine Hermitesche Form auf V ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, die $\mathbb{C}$-linear im ersten Argument ist, und die für alle $v, w \in V$ folgendes erfüllt:*

$$\overline{\langle v, w \rangle} = \langle w, v \rangle$$

Bemerkung
Daraus folgt, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *konjugiert-linear* im zweiten Argument ist, d.h.

$$\langle u, \lambda v + \mu w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \overline{\mu}\langle u, w\rangle \quad \text{für alle} \quad u, v, w \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

denn $\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\langle \lambda v, u\rangle} = \overline{\lambda}\ \overline{\langle v, u\rangle} = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle$. [3mm] Außerdem ist $\langle v, v\rangle$ reell, da $\overline{\langle v, v\rangle} = \langle v, v\rangle$.

Bemerkung
Die Menge der Hermiteschen Formen eines komplexen Vektorraumes ist ein *reeller* (kein komplexer!) Vektorraum, denn: Ist β eine Hermitesche Form und $\lambda \in \mathbb{C}$, so gilt

$$(\lambda\beta)(u, v) = \lambda\beta(u, v) = \lambda\overline{\beta(v, u)} = \overline{\overline{\lambda}\beta(v, u)},$$

d.h. $(\lambda\beta)(u, v) = \overline{(\lambda\beta)(v, u)}$, falls $\lambda = \overline{\lambda}$ reell.

Definition 15. *Eine Hermitesche Form $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt positiv definit, wenn*

$$\langle v, v\rangle > 0 \quad \textit{für alle } v \in V \setminus 0.$$

Ein (Hermitesches) Skalarprodukt auf V ist eine positiv definite Hermitesche Form $V \times V \to \mathbb{C}$. Ein Hermitescher Vektorraum ist ein komplexer VR zusammen mit einem Hermiteschen Skalarprodukt darauf. (Hermitesche Vektorräume heißen auch unitäre Vektorräume.)

Beispiel

- Das *kanonische (Hermitesche) Skalarprodukt* von $\mathbb{C}^n$ ist definiert durch

  $$\langle z, w\rangle := \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i,$$

  wobei $z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i$ und $w = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i$.

- Sei $V = \mathbb{R}^n$. Dann definiert jedes Euklidische Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ ein Hermitesches Skalarprodukt $\langle .,. \rangle^H$ auf $\mathbb{C}^n$ mittels komplex linearer und konjugiert linearer Erweiterung. D.h. wir definieren $\langle .,. \rangle^H$ durch

  $$\langle \mathbf{x} + \mathrm{i}\mathbf{y}, \mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}\rangle^H := \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}\rangle + \mathrm{i}\left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle\right)$$

  für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

  $\langle .,. \rangle^H$ ist in der Tat ein Hermitesches Skalarpodukt (ÜA)

Bemerkung
Sei V ein Hermitescher Vektorraum.

- Auf V definiert man wieder die Länge(auch Norm, Begründung folgt) eines Vektors mittels

  $$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}, \quad v \in V.$$

- Ist $\langle .,. \rangle$ ein Hermitesches Skalarpodukt, so definiert sein Realteil $g(u,v) := Re\langle u,v\rangle$ ein Euklidisches Skalarprodukt auf V aufgefasst als reeller Vektorraum (ÜA).

Satz 13 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Sei $h = \langle \cdot,\cdot \rangle$ ein Hermitesches Skalarprodukt auf einem $\mathbb{C}$-VR V.*

(i) Dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$(*) \quad |\langle v,w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

(ii) Gleichheit in $(*)$ gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis.

(i) Wir können annehmen, dass $\langle v,w\rangle \neq 0$ und setzen

$$\lambda := \frac{\overline{\langle v,w\rangle}}{|\langle v,w\rangle|}.$$

Wegen $|\langle v,w\rangle|^2 = \langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle}$ gilt dann

$$\langle \lambda v, w\rangle \;=\; \lambda\langle v,w\rangle \;=\; \frac{\langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle}}{|\langle v,w\rangle|} \;=\; |\langle v,w\rangle|.$$

Die CS-Ungleichung für das *Euklidische* Skalarprodukt $g = \mathrm{Re}(h)$ liefert weiter

$$(2) \quad \langle \lambda v, w\rangle = g(\lambda v, w) \leq \sqrt{g(\lambda v, \lambda v)}\sqrt{g(w,w)} = \|v\| \cdot \|w\|.$$

(ii) Gleichheit in (2) und somit in $(*)$ gilt genau dann, wenn λv und w linear abhängig über $\mathbb{R}$ und somit v und w linear abhängig über $\mathbb{C}$ sind.

□

Die Euklidische Norm

Die Euklidische Norm
Wie im Fall von Euklidischen Vektorräumen gilt für Hermitesche Vektorräume V: Das Hermitesche Skalarpodukt $\langle \cdot,\cdot \rangle$ definiert eine Norm $\|\cdot\|$ auf V:

$$\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}, \quad v \in V.$$

Für N2) rechnet man nach: $\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v,v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\|v\|^2$. Die durch das kanonische SP auf dem $\mathbb{R}^n$ und die kanonische Hermitesche Form auf dem $\mathbb{C}^n$ definierte Norm heißt *Euklidische Norm*,

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i}}$$

Unitäre Basen

Auch für Hermitesche Vektorräume gibt es ausgezeichnete Basen:

Definition 16 (Unitäre Basen)**.** *Sei* $(V, \langle ., . \rangle)$ *ein endlichdimensionaler Hermitescher VR. Eine unitäre Basis von* V *ist eine Basis* $(w_1, \ldots, w_n)$ *mit*

$$\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}.$$

(analog zum Begriff der Orthonormalbasis für Euklidische Vektorräume.)

Die Komponenten eines Vektors $v \in V$ in einer unitären Basis $(w_1, \ldots, w_n)$ sind wieder gegeben durch $\langle v, w_i \rangle$, d.h. $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_i \rangle w_i$.

Satz 14. *Jeder endlichdimensionale Hermitesche Vektorraum besitzt eine unitäre Basis.*

Beweis. Übungsaufgabe (wie für Orthonormalbasen) □

2.6 Orthogonale und unitäre Gruppe

Die orthogonale Gruppe

Definition 17. *Sei* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *ein Euklidischer VR.*

Eine surjektive lineare Abbildung $F : V \to V$ *heißt orthogonal, wenn*

$$\langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \text{für alle} \quad v, w \in V.$$

Bemerkung

- Aus der Gleichung folgt, dass F injektiv ist: für $v \neq 0$ ist auch $F(v) \neq 0$. Falls $\dim V < \infty$, so folgt daraus die Surjektivität. Diese muss also bei endlich dimensionalen Vektorräumen nicht gefordert werden.
- Die orthogonalen Abbildungen bilden eine Untergruppe $\mathrm{O}(V) \subset \mathrm{Aut}(V)$, die sogenannte *orthogonale Gruppe*.
- Orthogonale Abbildungen erhalten Winkel, Längen und Abstände. Sie setzen sich daher aus Drehungen und Spiegelungen zusammen.

Die orthogonale Gruppe des $\mathbb{R}^n$

Beispiel

Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Dann definiert man die *orthogonale Gruppe*

$$\mathrm{O}(n) := \mathrm{O}(\mathbb{R}^n, \langle ., . \rangle)$$

(als Gruppe von Matrizen); es gilt für $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$

$$A \in \mathrm{O}(n) \Longleftrightarrow A^t A = \mathbf{1}_n,$$

Denn: Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ und e_i die kanonische Basis. Dann ist $A \in \mathrm{O}(n) \iff$

$$\delta_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle \stackrel{!}{=} \langle Ae_i, Ae_j\rangle = \sum_{k,l} a_{ki}a_{lj}\langle e_k, e_l\rangle = \sum_{k,l} a_{ki}a_{lj}\delta_{kl} = \sum_{k} a_{ki}a_{kj}$$

für alle $i,j = 1,\ldots,n$. Dies ist aber äquivalent zu $\mathbf{1}_n = A^t A$.

Die unitäre Gruppe

Definition 18 (Unitäre Gruppe)**.** *Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hermitescher VR.*
Ein surjektiver Endomorphismus $F : V \to V$ heißt unitär, wenn

$$\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle \quad \textit{für alle} \quad v, w \in V.$$

(Falls $\dim V < \infty$, so braucht die Surjektivität nicht gefordert zu werden.) Die unitären Endomorphismen bilden eine Untergruppe $\mathrm{U}(V) \subset \mathrm{Aut}(V)$, die sogenannte unitäre Gruppe (ÜA).

Beispiel
Für $\mathrm{U}(n) := \mathrm{U}(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $\langle z, w\rangle := \sum_{i=1}^n z_i\overline{w}_i$: $A \in \mathrm{U}(n) \iff \overline{A}^t A = \mathbf{1}_n$.

Übungsaufgabe
$\mathrm{U}(n)$ kann als Untergruppe von $\mathrm{O}(2n)$ aufgefasst werden.

2.7 Normalformen unitärer Endomorphismen

Normalformen von Endomorphismen

Für bestimmte Mengen von Endomorphismen $F : V \to V$ existiert eine *Normalform.* Damit ist gemeint, dass man stets eine Basis von V finden kann, in der die darstellende Matrix Normalform – z.B. Diagonalgestalt – hat (und dass "echt" verschiedene Endomorphismen in Normalform auch verschieden aussehen).

Sei z. B. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit der darstellenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

bezüglich der kanonischen Basis (e_1, e_2). Dann ist $b_1 = e_1 - e_2$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{1}{2}$, und $b_2 = e_1 + e_2$ zum Eigenwert $\frac{3}{2}$. D.h. in der Basis (b_1, b_2) hat F die viel einfachere Diagonalgestalt

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Wir werden insbesondere Normalformen für orthogonale und unitäre Endomorphismen finden.

Satz 15 (Normalform unitärer Endomorphismen)**.** *Sei V ein endlichdimensionaler Hermitescher Vektorraum und $F \in \mathrm{U}(V)$ ein unitärer Endomorphismus.*

(i) Die Eigenwerte von F sind komplexe Zahlen vom Betrag 1.

(ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

(iii) Es gibt eine unitäre Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von F. D.h. F ist in einer unitären Basis diagonalisierbar.

Beweis.

(i) Sei v ein Eigenvektor von F und $\lambda \in \mathbb{C}$ der zugehörige Eigenwert. Aus

$$0 \neq \langle v, v \rangle = \langle Fv, Fv \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \overline{\lambda} \langle v, v \rangle$$

ergibt sich $|\lambda| = 1$.

(ii) Seien $v, w \in V$ Eigenvektoren von F zu den Eigenwerten λ und μ. [1mm] Wegen (i) ist $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$. Daher impliziert $\mu \neq \lambda$, dass $\lambda \overline{\mu} \neq 1$. [1mm] Aus $\langle v, w \rangle = \langle Fv, Fw \rangle = \lambda \overline{\mu} \langle v, w \rangle$ folgt daher $\langle v, w \rangle = 0$.

(iii) Beweis durch Induktion nach $n = \dim V$. Der Fall $n = 1$ ist klar.

Sei $\dim V \geq 2$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat jedes nichtkonstante komplexe Polynom eine Nullstelle. Insbesondere hat das charakteristische Polynom von F eine Nullstelle und F mithin einen Eigenwert λ_1.

Wir wählen einen zugehörigen Eigenvektor $b_1 \in V$ der Länge 1 und betrachten $W := b_1^{\perp}$.

Es gilt $\dim W = n - 1$ und $FW \subset W$, denn aus $w \in W$ folgt

$$0 = \langle b_1, w \rangle = \langle Fb_1, Fw \rangle = \lambda_1 \langle b_1, Fw \rangle$$

und somit $Fw \in W$. (Wg. (i) ist $\lambda_1 \neq 0$.)

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine unitäre Basis $(b_2, \ldots, b_n)$ von W bestehend aus Eigenvektoren von F und $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ist die gesuchte unitäre Basis von V. □

Normalform orthogonaler Endomorphismen

Folgerung 16 (Normalform orthogonaler Endomorphismen)**.** *Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und $F \in \mathrm{O}(V)$ ein orthogonaler Endomorphismus.*

(i) Eigenwerte von F sind reelle Zahlen vom Betrag 1, dh. $= \pm 1$.

(ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

(iii) Es gibt eine Orthonormalbasis bezüglich der F durch eine Blockdiagonalmatrix folgender Art dargestellt wird

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, D_{\varphi_1}, \ldots, D_{\varphi_q}),$$

wobei $\lambda_j \in \{\pm 1\}$*,* $D_{\varphi_j} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & -\sin\varphi_j \\ \sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}$ *Drehungen um den Winkel* $\varphi_j \in \mathbb{R}$ *sind, und* $p + 2q = \dim V$*.*

Beweis.

(i-ii) Gleicher Beweis wie für unitäre Endomorphismen.

(iii) Analog erhalten wir auch eine aus Eigenvektoren bestehende ONB $(b_1, \ldots, b_p)$ für die Summe $U := V_1 \oplus V_{-1}$ der Eigenräume $V_{\pm 1}$.

Es sei $U \neq V$. Wieder bildet F das orthogonale Komplement $W := U^{\perp}$ in sich ab. Außerdem enthält W keine Eigenvektoren von F.

Insbesondere hat W gerade Dimension $m = 2q$, denn sonst hätte das charakteristische Polynom der Einschränkung $F|_W$ eine reelle Nullstelle.

Es genügt zu zeigen, dass W eine ONB besitzt, bezüglich der die darstellende Matrix von $F|_W$ die Gestalt $\operatorname{diag}(D_{\varphi_1}, \ldots, D_{\varphi_q})$ hat .

Weiter im Beweis:

Durch Wahl einer ONB von W können wir annehmen, dass $W = \mathbb{R}^m$ der Euklidische Raum ist und $F|_W$ gegeben ist durch $A \in \mathrm{O}(m)$.

Wir können A als komplexe Matrix, d.h. als Endomorphismus des $\mathbb{C}^m$, auffassen. Dann ist A unitär bezüglich des Hermiteschen Skalarproduktes auf $\mathbb{C}^n$, welches durch das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ induziert wird, denn $A^t A = \mathbf{1}_m$ und $\overline{A} = A$, d.h. $\overline{A}^t A = \mathbf{1}_m$.

Ist nun μ ein komplexer Eigenwert mit Eigenvektor $v = \mathbf{x} + \mathbf{i}\mathbf{y}$, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert mit Eigenvektor $\overline{v} := \mathbf{x} - \mathbf{i}\mathbf{y}$. Dies gilt da A reell ist:

$$Av = \mu v \implies A\overline{v} = \overline{Av} = \overline{\mu v} = \overline{\mu} \cdot \overline{v}.$$

Die Eigenwerte $\mu_j = e^{i\varphi_j}$ $(\varphi_j \in \mathbb{R})$ treten also in Paaren auf, denn die komplexe Konjugation bildet den Eigenraum zum Eigenwert μ isomorph auf den Eigenraum zum Eigenwert $\overline{\mu}$ ab.

Weiter im Beweis: Nach dem Satz gibt es eine unitäre Basis

$$(\beta_1, \ldots, \beta_q, \overline{\beta_1}, \ldots, \overline{\beta_q})$$

von $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{2q}$ bestehend aus Eigenvektoren von $A \in \mathrm{U}(m)$ mit zugehörigen Eigenwerten

$$(\mu_1, \ldots, \mu_q, \overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_q).$$

Hierbei ist $\mu_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j}$ mit $\varphi_j \in \mathbb{R}$. Wir setzen für $j = 1, \ldots, q$:

$$\begin{aligned} \beta_j' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_j + \overline{\beta_j}) \\ \beta_j'' &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\beta_j - \overline{\beta_j}). \end{aligned}$$

$(\beta_1', \beta_1'', \ldots, \beta_q', \beta_q'')$ ist eine ONB von $\mathbb{R}^m$. (Das Euklidische SKP von $\mathbb{R}^m$ ist die Einschränkung des Hermiteschen SKP von $\mathbb{C}^m$.)

Die darstellende Matrix von A bezüglich dieser Basis ist von der gewünschten Form (ÜA). $\square$

2.8 Selbstadjungierte Endomorphismen

Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition 19 (Selbstadjungierte Endomorphismen)**.** *Sei F ein Endomorphismus eines Euklidischen oder Hermiteschen Vektorraumes $(V, \langle .,. \rangle)$.*

- *Ein Endomorphismus $F^{ad} \in \mathrm{End}(V)$ heißt zu F adjungiert, falls*

$$\langle Fv, w \rangle = \langle v, F^{ad} w \rangle \quad \text{für alle} \quad v, w \in V.$$

- *F heißt selbstadjungiert, wenn F^{ad} existiert und $F = F^{ad}$. (Selbstadjungierte Endomorphismen eines Euklidischen bzw. Hermiteschen Vektorraumes heißen auch symmetrische bzw. Hermitesche Endomorphismen.)*

Satz 17. *Sei F ein Endomorphismus eines Euklidischen oder Hermiteschen VR's V.*

- *Dann existiert höchstens ein zu F adjungierter Endomorphismus F^{ad}.*
- *Ist V endlich-dimensional, so existiert F^{ad}.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass $\langle .,. \rangle$ nicht entartet ist:
Seien F_1 und F_2 zu F adjungiert. Dann gilt für alle $u, v \in V$, dass

$$\langle u, F_1(v) - F_2(v) \rangle = \langle F(u), v \rangle - \langle F(u), v \rangle = 0.$$

Damit muss aber gelten, dass $F_1(v) = F_2(v)$ für alle $v \in V$.

Sei nun $\dim(V) = n$, $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Orthornomal- bzw. eine Hermitesche Basis und sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ die darstellende Matrix von F bezüglich dieser Basis, d.h.

$$F(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i, \quad \text{oder äquivalent dazu } \langle F(b_j), b_i \rangle = a_{ij}$$

Dann ist F^{ad} gegeben durch die darstellende Matrix $\overline{A}^t$, denn

$$\langle b_j, F^{ad}(b_i) \rangle = \langle b_j, \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_{ik} b_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \langle b_j, b_k \rangle = a_{ij},$$

und damit $\langle F(u), v \rangle = \langle u, F^{ad}(v) \rangle$. $\square$

Symmetrische und Hermitesche Matrizen

Folgerung 18 (aus dem Satz)**.** *Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer oder Hermitescher VR und A die darstellende Matrix eines Endomorphismus F von V bezüglich einer orthonormalen bzw. unitären Basis. Dann ist darstellende Matrix von F^{ad} gegeben durch $\overline{A}^t$ und es gilt*

$$F \text{ selbstadjungiert} \iff A = \overline{A}^t.$$

Beispiel
Insbesondere gilt für $V = \mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen Euklidischen Skalarprodukt bzw. für $V = \mathbb{C}^n$ mit dem kanonischen Hermiteschen Skalarprodukt, dass

$$A^{ad} = A^t \text{ bzw. } A^{ad} = \overline{A}^t.$$

Matrizen mit $A = A^t$ heißen *symmetrisch*, Matrizen mit $A = \overline{A}^t$ heißen *Hermitesch.*

Kern und Bild von Endomorphismen

Satz 19. *Sei F ein Endomorphismus eines Euklidischen oder Hermiteschen Vektorraumes V. Dann gilt*

$$\begin{aligned} Kern(F) &= (Bild(F^{ad}))^\perp \\ Kern(F^{ad}) &= (Bild(F))^\perp \end{aligned}$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der definierenden Gleichung

$$\langle Fv, w \rangle = \langle v, F^{ad} w \rangle, \quad v, w \in V.$$

Erinnerung:

$$\begin{aligned} Kern(F) &= \{v \in V \mid Fv = 0\} \\ Bild(F^{ad}) &= \{F^{ad} w \mid w \in V\} \end{aligned}$$

$\square$

Normalform selbstadjungierter Endomorphismen

Satz 20 (Normalform selbstadjungierter Endomorphismen)**.** *Sei V ein Euklidischer oder Hermitescher VR und $F \in End(V)$ selbstadjungiert.*

(i) Die Eigenwerte von F sind reell.

(ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von F stehen senkrecht aufeinander.

(iii) Falls $\dim V < \infty$, so besitzt V eine orthonormale bzw. unitäre Basis bestehend aus Eigenvektoren von F.

Beweis.

(i) Aus $Fv = \lambda v$, $\|v\| = 1$, folgt $\lambda = \langle Fv, v\rangle = \langle v, Fv\rangle = \overline{\lambda}$.

(ii) v, w seien Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann folgt $\langle v, w\rangle = 0$ aus
$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle Fv, w\rangle = \langle v, Fw\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$

Weiter im Beweis:

(iii) Es genügt zu zeigen, dass F einen Eigenvektor v besitzt. F erhält dann das orthogonale Komplement $W := v^{\perp}$:

$$\langle v, w\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle v, Fw\rangle = \langle Fv, w\rangle = 0.$$

Somit ist ein Induktionsbeweis möglich.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat das charakteristische Polynom von F eine Nullstelle λ. Im Fall V komplex und hermitesch liefert das die Existenz eines Eigenwertes.

Im Fall V reell und Euklidisch fixieren wir eine ONB und identifizieren V mit $\mathbb{R}^n$. Wir können dann F auffassen als selbstadjungierten Endomorphismus von $\mathbb{R}^n$ aber auch von $\mathbb{C}^n$. Beide haben dasselbe charakteristische Polynom, welches nach (i) reelle Nullstellen hat und daher in reelle Linearfaktoren zerfällt.

Also hat F auch im Fall eines reellen Vektorraumes V einen Eigenvektor $v \in V$.

$\square$

2.9 Hauptachsentransformation

Dualisierung

Satz 21. *Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein endlich-dimensionaler Euklidischer (oder Hermitescher) Vektorraum. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum der symmetrischen Bilinearformen (bzw. der Hermiteschen Formen) auf V ist isomorph zum $\mathbb{R}$-Vektorraum der selbstadjungierten Endomorphismen von V.*

Beweis. Der Isomorphismus ist gegeben durch die Beziehung

$$\beta(u, v) := \langle F(u), v\rangle, \quad \forall\ u, v \in V.$$

zwischen einem selbstadjungierten Endomorphismus F und einer symmetrischen/Hermiteschen Form β (ÜA). $\square$

Folgerung 22. *Sei V ein $\mathbb{C}$-VR mit $dim(V) = n$ und h eine Hermitesche Form auf V.*

(i) Dann existiert eine Basis von V, bezüglich der die darstellende Matrix von h folgende Gestalt hat:
$$\mathrm{diag}(\mathbf{1}_{r_+}, -\mathbf{1}_{r_-}, 0_{r_0})$$
mit $r_+ + r_- + r_0 = n$ und $0_{r_0} \in Mat_{r_0}(\mathbb{C})$ die $r_0 \times r_0$-Nullmatrix.

(ii) Die Zahlen r_+ und r_- hängen nicht von der Wahl der Basis ab.

Beweis. (i) Wir wählen ein Hermitesches SKP $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V.

Nach dem vorigen Satz entspricht der Hermiteschen Form h ein selbstadjungierter Endomorphismus F. Dieser kann aber in Normalform gebracht werden mit reellen Eigenwerten λ_i und einer unitären Basis $(u_1,\ldots,u_n)$ aus Eigenvektoren von F. Davon sind r_+ Eigenwerte > 0, r_- Eigenwerte < 0 und $dim(Ker(F)) = n - r_+ - r_-$.

Durch Multiplikation von u_i mit $\frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$, falls $\lambda_i \neq 0$ und Umordnung erhalten wir eine Basis mit der gewünschten Eigenschaft.

Beweis von (ii): Aus

$$V_0 = Kern\, F = \{v | h(v,w) = 0 \quad \text{für alle} \quad w \in V\}$$

folgt die Unabhängigkeit von $r_0 = \dim V_0$ von allen Wahlen.

Es bleibt zu zeigen, dass auch die Zahlen $r_\pm$ unabhängig von allen Wahlen sind. Wir zeigen das z.B. für r_+, indem wir zeigen, dass

$$r_+ = \max\{\dim W \mid W \subset V, h \text{ auf } W \text{ positiv-definit}\}.$$

Dazu sei V_+ bzw. V_- die Summe der Eigenräume zu den positiven bzw. negativen Eigenwerten.

h ist auf V_+ positiv definit und auf dem Komplement $V_- \oplus V_0$ negativ semi-definit, d.h. $h(v,v) \leq 0$ für alle $v \in V_- \oplus V_0$.

Sei $W \subset V$ ein UR, auf dem h positiv definit ist.

Dann gilt $W \cap (V_- \oplus V_0) = 0$ und somit $\dim W \leq r_+$. □

Hauptachsentransformation

Folgerung 23 (Hauptachsentransformation)**.** *Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer VR und β eine symmetrische Bilinearform auf V.*

(i) Dann existiert eine orthogonale Basis $(b_1,\ldots,b_n)$ von V, bezüglich der die darstellende Matrix von β folgende Gestalt hat:

$$\mathrm{diag}(\mathbf{1}_{r_+}, -\mathbf{1}_{r_-}, 0_{r_0}).$$

(Die Geraden $\mathbb{R}b_i$ heißen Hauptachsen von β.)

(ii) Die Zahlen r_+, r_- und r_0 hängen nicht von der Wahl der Basis ab.

Beweis. Analog zum Beweis des vorhergehenden Satzes. □

Aussage (i) ist bekannt als Satz von der *Hauptachsentransformation*, (ii) als *Trägheitssatz von Sylvester.*

Beispiel

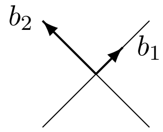
Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit kanonischen SP $\langle .,. \rangle$. Dann ist $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid \langle v, v\rangle = 1\}$ gleich dem Kreis mit Radius 1. Nun betrachten wir die symmetrische Bilinearform

$$\beta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = 5xx' + 5yy' + 3xy' + 3yx'.$$

Für die orthogonale Basis $b_1 = \frac{1}{4}(e_1 + e_2)$, $b_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$ gilt $\beta(b_i, b_j) = \delta_{ij}$.

Insbesondere sind die Hauptachsen von β die Diagonalen $y = x$ und $y = -x$. Das sind genau die Hauptachsen der Ellipse

$$E = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \beta(v, v) = 1 \right\} \quad =$$



Es gilt $\beta(v, v) = 5x^2 + 5y^2 + 6xy = (\frac{x+y}{\frac{1}{2}})^2 + (\frac{x-y}{1})^2$.

3 Metrische Räume und Vollständigkeit

3.1 Metrische Räume

Metrische Räume

Dies sind Mengen, auf denen ein Abstand zwischen je zwei Elementen definiert ist.

Definition 20. *Sei X eine Menge. Eine Metrik (ein Abstand) auf X ist eine Abbildung*

$$d : X \times X \to [0, \infty)$$

mit folgenden Eigenschaften:

M1) Für $x, y \in X$ gilt genau dann $d(x, y) = 0$, wenn $x = y$.

M2) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.

M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung).

Eine Norm definiert einen Abstand

Bemerkungen

- Die *Euklidische Metrik* des $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

- Allgemeiner wird durch

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

auf jedem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ eine Metrik $d : V \times V \to [0, \infty)$ definiert. Dabei folgt die Dreiecksungleichung für die Metrik aus der für die Norm:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{z}\| \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen

Die Metrik dient dazu, Konvergenz von Folgen zu definieren.

Definition 21. *(i) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, heißt konvergent mit Grenzwert $x \in X$, in Zeichen $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, wenn die Folge $d(x_n, x) \in \mathbb{R}$ eine Nullfolge ist, d.h. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.*

(ii) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt im Punkt $x \in X$ stetig, wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \in Y$ für jede gegen $x \in X$ konvergente Folge $x_n \in X$.

f heißt stetig, wenn f in allen Punkten $x \in X$ stetig ist.

Beispiel

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter VR mit zugehöriger Metrik d.

Dann ist $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, denn aus der Dreiecksungleichung für die Norm folgt $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|$.

3.2 Die Parallelogrammgleichung

Die Parallelogrammgleichung

Die Frage, wann eine Norm von einem Skalarprodukt kommt, kann mittels der Parallelogrammgleichung entschieden werden.

Satz 24 (Parallelogrammgleichung)**.** *Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem reellen VR V wird genau dann durch ein Skalarprodukt auf V induziert, wenn für alle $v, w \in V$ die Parallelogrammgleichung gilt:*

$$(*) \quad \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Beweis.

($\Rightarrow$) Ist die Norm durch ein Skalarprodukt definiert, d.h.ist $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ für alle $u \in V$, so ergibt sich (*) durch Berechnung der linken Seite mittels der Bilinearität des Skalarproduktes.

Weiter im Beweis:

($\Leftarrow$) Wir definieren ein Skalarprodukt

$$\langle v, w\rangle := \frac{1}{4}\left(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2\right).$$

Dann gilt offenbar $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ und $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$.

Es genügt daher, die Linearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im ersten Argument nachzuweisen.

Für alle $u, u' \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \langle u+u', w\rangle + \langle u-u', w\rangle \\
= \ & \frac{1}{4}\left(\|u+u'+w\|^2 - \|u+u'-w\|^2\right) \\
& + \frac{1}{4}\left(\|u-u'+w\|^2 - \|u-u'-w\|^2\right) \\
\overset{(*)}{=} \ & \frac{1}{2}(\|u+w\|^2 + \|u'\|^2) - \frac{1}{2}(\|u-w\|^2 + \|u'\|^2) \\
= \ & \frac{1}{2}(\|u+w\|^2 - \|u-w\|^2) = 2\langle u, w\rangle.
\end{aligned}$$

Weiter im Beweis:

Wir haben gezeigt, dass

$$(1) \quad \langle u+u', w\rangle + \langle u-u', w\rangle = 2\langle u, w\rangle.$$

Für $u = u'$ erhält man $\langle 2u, w\rangle = 2\langle u, w\rangle$.

Nun zeigen wir die Additivität: Seien $v, v' \in V$ beliebig. Definiert man $u = \frac{1}{2}(v+v')$ und $u' = \frac{1}{2}(v-v')$, so ist $v = u+u'$ und $v' = u-u'$.

Aus (1) erhält man dann

$$\langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle \overset{(1)}{=} \langle 2u, w\rangle = \langle v+v', w\rangle,$$

d.h. die Additivität.

Daraus ergibt sich $\langle nv, w\rangle = n\langle v, w\rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Desweiteren folgt aus der Definition und der Norm-Eigenschaft (N2), dass

$$\langle -v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|-v+w\|^2 - \|v+w\|^2\right) = -\langle v, w\rangle,$$

und damit $\langle nv, w\rangle = n\langle v, w\rangle$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Weiter im Beweis: Daraus ergibt sich wiederum dass

$$\frac{1}{n}\langle u, w\rangle = \frac{1}{n}\langle n\frac{1}{n}u, w\rangle = \langle \frac{1}{n}u, w\rangle$$

für alle $u \in V, n \in \mathbb{Z}^*$. Somit

$$(2) \qquad \langle \lambda u, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle$$

für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Die Stetigkeit der Norm liefert nun die Gleichung (2) für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, da es zu jeder reellen Zahl λ eine Folge rationaler Zahlen gibt, die gegen λ konvergiert. $\square$

Beispiele

(i) Die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt natürlich die Parallelogrammgleichung.

(ii) Durch

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad x = \sum x_i e_i \in \mathbb{R}^n,$$

wird eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Diese erfüllt nicht die Parallelogrammgleichung, denn z.B. ist

$$8 = \|e_1 + e_2\|^2 + \|e_1 - e_2\|^2 \quad \neq \quad 2\|e_1\|^2 + 2\|e_2\|^2 = 4.$$

(iii) Die *Maximumsnorm*

$$\|x\|_{max} := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt nicht die Parallelogrammgleichung.

3.3 Äquivalente Normen

Äquivalente Normen

Definition 22. *Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem VR V heißen äquivalent, wenn es positive Konstanten c und C gibt, so dass*

$$c\|v\| \leq \|v\|' \leq C\|v\| \quad \text{für alle } v \in V.$$

Bemerkung

- Dies definiert eine Äquivalenzrelation zwischen Normen (ÜA).

  Insbesondere sind zwei Normen, die beide zu einer dritten äquivalent sind, auch zueinander äquivalent (Transitivität).

- Seien d_1 und d_2 die durch zwei *äquivalente* Normen auf V definierten Metriken. Dann konvergiert eine Folge $x_n \in V$ gegen x bzgl. d_1 genau dann, wenn sie auch bzgl. d_2 gegen x konvergiert;

  d.h. (V, d_1) und (V, d_2) haben dieselben konvergenten Folgen.

Alle Normen auf endl. dimensionalen VR'en sind äquivalent

Satz 25. *Je zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem endlichdimensionalen reellen oder komplexen VR V sind äquivalent.*

Beweis. Sei $B := (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V.
Für $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \in V$ betrachten wir wieder die Norm

$$\|x\|_{max} := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Wir zeigen, dass jede Norm auf V äquivalent zu $\|\cdot\|_{max}$ ist.

Für jede Norm $\|\cdot\|$ auf V gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\|x\| \;=\; \|\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\| \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|b_i\| \;\leq\; C\|x\|_{max},$$

wobei z. B. $C := \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|$. Dies beweist die eine Ungleichung.

Weiter im Beweis:

Wir nehmen an, es gäbe kein $c > 0$ mit $c\|\cdot\|_{max} \leq \|\cdot\|$.

D.h. es gibt für jedes $c > 0$ ein $y \in V$ mit $c\|y\|_{max} > \|y\|$. Damit findet man für jedes c einen Vektor $x := \frac{y}{\|y\|_{max}}$ mit $\|x\|_{max} = 1$ und $c > \|x\|$.

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es also einen Vektor $x^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} b_i \in V$ mit $|x_i^{(k)}| \leq 1$ und $\frac{1}{k} > \|x^{(k)}\|$. Nach Bolzano-Weierstraß hat jede der beschränkten Zahlenfolgen $(x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, n$, eine konvergente Teilfolge.

Wir können daher annehmen, dass $(x^{(k)})$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{max}$ gegen $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \in V$ konvergiert.

Es gilt dann

$$\|x\| \leq \|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)}\| \leq C\|x - x^{(k)}\|_{max} + \frac{1}{k} \overset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} 0.$$

Also $x = 0$ und somit $0 = \|x\|_{max} = \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)}\|_{max}$, im Widerspruch zu $\|x^{(k)}\|_{max} = 1$. $\square$

3.4 Vollständigkeit und Hilberträume

Vollständigkeit, Banachräume, Hilberträume

Definition 23 (Vollständigkeit von metrischen Räumen). *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

- *Eine Folge $x_n \in X$ heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass*
  $$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \textit{für alle } m, n \geq N.$$
- *(X, d) heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in X gegen einen Grenzwert $x \in X$ konvergiert.*

Definition 24.

- *Ein Banachraum ist ein normierter Vektorraum, der (bezüglich der zur Norm gehörenden Metrik) vollständig ist.*
- *Ein reeller bzw. komplexer Hilbertraum ist ein Euklidischer bzw. Hermitescher Vektorraum, der (bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Metrik) vollständig ist.*

Bemerkungen/Beispiele

1. Wieder gilt: Seien d_1 und d_2 die durch zwei *äquivalente* Normen auf V definierten Metriken. Dann ist $x_n \in V$ eine Cauchyfolge bzgl. d_1 genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge bzgl. d_2 ist.

2. Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ folgt, dass $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{max})$ ein Banachraum ist: Ist $x_n \in \mathbb{K}^n$ eine Cauchyfolge, so auch alle ihre Komponenten.
3. Mittels Wahl einer Basis, folgt daraus: Jeder endlichdimensionale normierte reelle oder komplexe Vektorraum ist ein Banachraum.
4. Damit sind auch endlichdimensionale Euklidische und Hermitesche Vektorräume Hilberträume.

   Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ mit dem Euklidischen und $\mathbb{C}^n$ mit dem Hermiteschen Skalarprodukt ein reeller bzw. komplexer Hilbertraum.
5. Unendlich-dimensionale Hilberträume spielen eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik.

Beipiel für einen ∞-dimensionalen Hilbertraum: Quadratisch summierbare Folgen

Satz 26. *Der Vektorraum der quadratisch summierbaren komplexen Zahlenfolgen*

$$\ell^2 := \ell^2(\mathbb{C}) := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, x_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

mit dem Hermiteschen Skalarprodukt (ÜA!)

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

ist ein Hilbertraum.

Beweis. $(\ell^2, \langle .,.\rangle)$ ist ein Hermitescher Vektorraum (siehe ÜA).

Wir beweisen die Vollständigkeit von ℓ^2: Sei $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots)$ eine Cauchy-Folge in ℓ^2.

Dann ist jede der Komponentenfolgen $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und konvergiert daher gegen einen Grenzwert $x_n := \lim_{k\to\infty} x_n^{(k)}$.

Dann gilt: $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ und $x = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$, denn:

Da $(x^{(k)})$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=0}^{m} |x_n^{(p)} - x_n^{(q)}|^2 < \varepsilon^2$$

für alle $p, q \geq N$ und alle $m \in \mathbb{N}$.

Grenzübergang $p \to \infty$ liefert:

$$\sum_{n=0}^{m} |x_n - x_n^{(q)}|^2 \leq \varepsilon^2$$

für alle $q \geq N$ und alle $m \in \mathbb{N}$, d.h. $\|x - x^{(q)}\| \leq \varepsilon$. □

3.5 Banachscher Fixpunktsatz

Banachscher Fixpunktsatz

Den Banachschen Fixpunktsatz werden wir in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen benutzen. Wir werden ihn dann auf bestimmte Banachräume von Funktionen anwenden, um die Existenz der Lösung einer Differentialgleichung nachzuweisen.

Satz 27 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $F : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung, d.h. es existiert $0 \leq \theta < 1$, so dass*

$$d(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$.

Dann existiert ein Fixpunkt von F, d.h. ein $x \in X$ mit $F(x) = x$.

Dieser Fixpunkt ist eindeutig bestimmt.

Des Weiteren konvergiert für alle Anfangswerte $x_0 \in X$ die durch $x_{k+1} = F(x_k)$ rekursiv definierte Folge (x_k) gegen diesen Fixpunkt.

Beweis. Existiert ein Fixpunkt, so ist er eindeutig bestimmt, denn für zwei Fixpunkte x und y ergibt sich $d(x, y) = 0$, also $x = y$, aus der Ungleichung

$$0 \leq d(x, y) \;=\; d(F(x), F(y)) \;\leq\; \theta d(x, y).$$

Die Folge (x_k) ist für jeden Startpunkt x_0 eine Cauchyfolge, denn es gilt, mit $C := d(x_1, x_0)$:

$$\begin{array}{llll} d(x_{n+k}, x_n) = & d(F(x_{n+k-1}), F(x_{n-1})) & \leq & \theta d(x_{n+k-1}, x_{n-1}) \;\leq\; \ldots \\ \leq \theta^n d(x_k, x_0) & \leq \theta^n \sum_{l=0}^{k-1} d(x_{l+1}, x_l) \leq \theta^n \sum_{l=0}^{k-1} \theta^l \cdot C \leq \frac{C\theta^n}{1-\theta} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. & & \end{array}$$

Da nun (X, d) vollständig ist, existiert ein Grenzwert $x \in X$.

Dieser ist aber auch der Fixpunkt, denn wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} d(F(x), x) \;&\leq\; d(F(x), x_k) + d(x_k, x) \\ &\leq\; \theta d(x, x_{k-1}) + d(x_k, x) \;\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Somit ist $d(F(x), x) = 0$, d.h. $F(x) = x$. □

Banachscher Fixpunktsatz

Beispiel aus dem 1. Semester: Berechnung von $\sqrt{2}$

Sei $X := [1, \infty)$ der mit der Euklidischen Metrik versehene vollständige metrische Raum.

Wir betrachten die Abbildung

$$F : X \ni x \;\mapsto\; x - \frac{1}{2x}(x^2 - 2) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \in X.$$

Diese Abbildung ist kontrahierend, denn

$$F(x) - F(y) \;=\; \frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \;=\; \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right)(x - y)$$

impliziert wegen $xy \geq 1$ dass $\|F(x) - F(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|$.

Somit hat F einen Fixpunkt, nämlich $\sqrt{2}$.

3.6 Topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen

Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 25. *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

- *Die Teilmenge $B_r(x) := \{y \in X | d(y, x) < r\}$ heißt Kugel (oder Ball) vom Radius r und Mittelpunkt x.*
- *Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt offen, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $r > 0$ gibt, so dass $B_r(x) \subset U$.*
- *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist.*

Bemerkung/ÜA

- Beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind wieder offen.
- Beliebige Durchschnitte von abgeschlossenen Mengen sind wieder abgeschlossen.
- Endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind wieder offen.
- Endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen sind wieder abgeschlossen.

Inneres, Abschluss und Rand

Definition 26. *Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$.*

(i) Das Innere von A ist definiert als die offene Teilmenge

$$\mathring{A} := \bigcup_{B \subset A \text{ offen}} B$$

(ii) Der Abschluss von A is definiert als die abgeschlossene Teilmenge

$$\overline{A} := \bigcap_{B \supset A \text{ abgeschl.}} B$$

(iii) $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$ heißt Rand von A.

Beispiel/ ÜA:
Der Abschluss der offenen Kugel $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ im Euklidischen Raum ist die abgeschlossene Kugel

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n | d(y, x) \leq r\}.$$

Der Rand der Kugel ist die *Sphäre* vom Radius r: $\partial B_r(x) = S_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n | d(y, x) = r\}$.

Stetige Abbildungen

Satz 28. *Sei $F : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann gilt*

F ist stetig

$\Leftrightarrow$ *Urbilder $F^{-1}(U)$ von offenen Mengen $U \subset Y$ sind offen.*

$\Leftrightarrow$ *Urbilder $F^{-1}(A)$ von abgeschlossenen Mengen A sind abgeschlossen.*

Beweis. Wir beweisen nur die erste Äquivalenz:

($\Leftarrow$) Zu $\varepsilon > 0$ betrachten wir die Kugel $B_\varepsilon(F(x)) \subset Y$, welche nach Vorraussetzung ein offenes Urbild hat. D.h. wir finden ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset F^{-1}(B_\varepsilon(F(x)))$. Da $x_n \to x \in X$, finden wir ein N mit $x_n \in B_\delta(x)\ \forall\ n > N$. Damit ist aber

$$F(x_n) \in F(F^{-1}(B_\varepsilon(F(x))) \subset B_\varepsilon(F(x)),$$

d.h. $F(x_n) \to F(x)$.

Weiter im Beweis:

($\Rightarrow$) Angenommen, es existiert eine offene Menge $V \subset Y$, so dass $F^{-1}(V)$ nicht offen ist.

D.h. $\exists x \in F^{-1}(V)$, so dass $B_{\frac{1}{n}}(x) \not\subset F^{-1}(V)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Sein nun x_n eine Folge mit $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \setminus F^{-1}(V)$.

Insbesondere gilt dann $x_n \to x$ und wegen der Stetigkeit gilt auch $F(x_n) \to F(x)$.

Da V offen war, gibt daher es ein δ mit $B_\delta(F(x)) \subset V$ und

$$F(x_n) \in B_\delta(F(x)) \subset V \quad \forall n > N.$$

Das steht aber im Widerspruch zu $x_n \notin F^{-1}(V)$. □

Satz 29 (Abgeschlossene Teilmengen von metrischen Räumen)**.** *Für eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes X gilt:*

A ist abgeschlossen

$\Leftrightarrow$ *Für alle $x \in X$ gilt: Wenn $x \in X$ Grenzwert einer konvergenten Folge von Elementen von A ist, so gilt $x \in A$.*

Beweis.

($\Rightarrow$) Sei $x_k \in A$ eine Folge mit Grenzwert $x \in X$.

Wenn $x \notin A$, so wäre $U = X \setminus A$ offen und $x \in U$

Das widerspricht aber der Konvergenz der Folge $x_k \in A$ gegen x.

($\Leftarrow$) Sei $x \in X \setminus A$. Wir zeigen, dass es $r > 0$ gibt mit $B_r(x) \subset X \setminus A$.

Sonst gibt es eine Folge $x_k \in B_{1/k}(x) \cap A$.

Da diese Folge gegen x konvergiert, folgt $x \in A$, im Widerspruch zu $x \in X \setminus A$.

□

Folgerung 30. *Sei X metrischer Raum. Sei A eine Teilmenge (versehen mit der Metrik, die durch die Metrik von X gegeben ist). Dann:*

(i) Ist A vollständig, so ist A abgeschlossen in X.

(ii) Ist X vollständig und A abgeschlossen, so ist A auch vollständig.

Beweis.

(i) Sei $x_k \in A$ konvergent mit Grenzwert $x \in X$.

Dann ist (x_k) eine Cauchy-Folge und somit $x \in A$ (A ist vollständig).

(ii) Sei $x_k \in A$ eine Cauchy-Folge.

Dann konvergiert (x_k) gegen $x \in X$ (X ist vollständig) und somit $x \in A$ (A ist abgeschlossen).

□

Kompakte Mengen

Definition 27 (Kompaktheit)**.** *Sei X ein metrischer Raum.*

- *Eine (offene) Überdeckung einer Teilmenge $A \subset X$ ist eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von (offenen) Teilmengen $U_i \subset X$ mit $A \subset \cup_{i\in I} U_i$.*
- *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt kompakt, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A eine endliche Teilüberdeckung $(U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k})$, $i_1, \dots, i_k \in I$, gibt.*

Satz 31. *Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Dann hat jede Folge in A eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A.*

Beweis.
Sei $x_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge.

Wenn $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A hat, dann gibt es zu jedem $a \in A$ eine offene Umgebung U_a, die nur endlich viele Glieder der Folge x_k enthält.

$(U_a)_{a\in A}$ ist eine offene Überdeckung der kompakten Menge A und besitzt daher eine endliche Teilüberdeckung $U_{a_1}, U_{a_2}, \dots, U_{a_r}$.

Nach Konstruktion enthält $\cup_{i=1}^r U_{a_i} \supset A$ nur endlich viele Glieder der Folge, im Widerspruch zu $x_k \in A$. □

Folgerung 32. *Jede kompakte Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes X ist abgeschlossen, vollständig und beschränkt.*

Beweis. Die Vollständigkeit und damit die Abgeschlossenheit folgt sofort aus dem vorhergehenden Satz. (Cauchyfolgen konvergieren, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzen.)

Die Beschränktheit bedeutet, dass es $x \in X$ und $R > 0$ gibt, so dass $A \subset B_R(x)$.
Für alle $x \in X$ ist $(B_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X und somit von A.
Also existiert eine endliche Teilüberdeckung $B_{k_1}(x), \dots, B_{k_r}(x)$
und mit $R = \max\{k_1, \dots, k_r\}$ erhalten wir $A \subset B_R(x)$. □

Satz 33. *X kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen $\Longrightarrow$ A kompakt.*

Beweis. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A.

Dann ist $(X \setminus A, (U_i)_{i\in I})$ eine offene Überdeckung des Kompaktums X.

Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(X \setminus A, U_{i_1}, \dots, U_{i_k})$ von X.

$(U_{i_1}, \dots, U_{i_k})$ ist eine endliche Teilüberdeckung von A. □

Folgerung 34. *Sei X ein metrischer Raum, in dem die abgeschlossenen Kugeln $\overline{B}_r(x)$ kompakt sind.*

Die kompakten Teilmengen von X sind dann genau die abgeschlossenen beschränkten Teilmengen.

Satz 35 (Satz von Heine-Borel)**.** *Im $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Euklidischen Metrik, (und in jedem endlich-dimensionalen normierten Vektorraum) gilt: Eine Teilmenge A ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Aufgrund der Folgerung genügt es zu zeigen, dass die abgeschlossenen Kugeln $\overline{B}_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt sind.

Da alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, können wir z.B. die Maximumsnorm zu Grunde legen.

Außerdem können wir $x = 0$ (Translationsinvarianz des Abstands) und $r = 1$ (Homogenität) annehmen, d.h. $\overline{B}_r(x) = \overline{B}_1(0) = [-1, 1]^n =: W$.

Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung des Würfels $W = W_0$.

Wir nehmen an, es gibt keine endliche Teilüberdeckung und führen diese Annahme zum Widerspruch.

Weiter im Beweis:

Wir konstruieren durch sukzessive Halbierung der Kantenlängen eine Folge von Würfeln W_k mit Kantenlänge 2^{1-k} und mit der Eigenschaft, dass W_k nicht durch endlich viele der U_i überdeckt wird. Dabei ist $W_0 = [-1, 1]^n$.

Halbierung der Kanten führt zu einer Zerlegung des Würfels W_k in 2^n Teilwürfel, von denen mindestens einer nicht durch endlich viele U_i überdeckt werden kann (sonst könnte man W_k durch endlich viele U_i überdecken); diesen wählen wir als W_{k+1}.

Sei (x_k) Folge mit $x_k \in W_k$. Dann ist (x_k) eine Cauchy-Folge.

Wegen der Abgeschlossenheit von W_i gilt $x = \lim_{k\to\infty} x_k \in W_i$, denn $x_k \in W_i$ für alle $k \geq i$.

Daraus folgt $x \in \cap_i W_i \subset W$.

Also existiert ein i_0 mit $x \in U_{i_o}$ und somit $B_\varepsilon(x) \subset U_{i_o}$, wenn $\varepsilon > 0$ klein genug ist.

Daraus ergibt sich $W_k \subset B_\varepsilon(x) \subset U_{i_o}$, wenn $2^{1-k} < \varepsilon$. Ein Widerspruch! (Hierbei haben wir benutzt, dass $\|x - y\|_{max} \leq 2^{1-k}$ für alle $y \in W_k$.) □

Satz 36. *Sei $F : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen und $A \subset X$ sei kompakt. Dann ist $F(A) \subset Y$ kompakt*

Beweis. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $F(A)$. Dann bilden die $V_i := F^{-1}(U_i)$ eine offene Überdeckung des Kompaktums A. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(V_{i_1}, \ldots, V_{i_k})$ und $(U_{i_1}, \ldots, U_{i_k})$ überdeckt dann $F(A)$. □

Folgerung 37. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und X kompakt.*

Dann ist f beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum in X an.

Beweis. Nach dem vorhergenden Satz ist $f(X)$ kompakt und somit beschränkt und abgeschlossen. □

Gleichmäßige Stetigkeit

Satz 38. *Jede stetige Abbildung $F : X \to Y$ von einem kompakten metrischen Raum X in einen metrischen Raum Y ist gleichmäßig stetig,*

d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass für alle $x, x' \in X$ gilt

$$d(F(x), F(x')) < \varepsilon \quad \textit{falls} \quad d(x, x') < \delta$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von F existiert für alle $x \in X$ ein $\delta(x) > 0$, so dass

$$d(F(x), F(x')) < \frac{\varepsilon}{2},$$

wann immer $d(x, x') < \delta(x)$.

Weiter im Beweis:

Da die offenen Kugeln $U_x := B_{\delta(x)/2}(x)$ das Kompaktum X überdecken, gibt es $x_1, \ldots, x_k \in X$ mit $X = \cup_{i=1}^k U_{x_i}$.

Seien nun $x, x' \in X$ mit

$$d(x, x') < \delta := \min_{i=1,\ldots,k} \delta(x_i)/2.$$

Dann gibt es x_i mit $x \in U_{x_i}$, d.h. $d(x, x_i) < \delta(x_i)/2$, und somit $d(x', x_i) < \delta(x_i)$.

Daraus ergibt sich

$$d(F(x), F(x_i)) < \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad d(F(x'), F(x_i)) < \varepsilon/2$$

und somit $d(F(x), F(x')) < \varepsilon$. □

3.7 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 28. *Seien* (X, d_X) *und* (Y, d_Y) *zwei metrische Räume und* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Abbildungen zwischen diesen. Man sagt* f_n *konvergiert gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion* f *genau dann, wenn es für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass*

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \ \forall n \geq N, \ \forall x \in X.$$

Sei $Y = \mathbb{C}$, und sei

$$\|f\|_X := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$$

die *Supremumsnorm* von f bezüglich X, dann konvergiert eine Folge f_n von Abbildungen $X \to \mathbb{C}$ genau dann gleichmäßig gegen $f : X \to \mathbb{C}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_X = 0.$$

Stetigkeit der Grenzfunktion

Satz 39. *Seien* (X, d_X) *und* (Y, d_Y) *zwei metrische Räume und* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von stetigen Abbildungen, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion* $f : X \to Y$ *konvergiert. Dann ist* f *stetig.*

Beweis. Wir zeigen, dass f in einem beliebig fixierten $x_0 \in X$ stetig ist.
Sei also $\varepsilon > 0$.
Da f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $n_\varepsilon > 0$ mit

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \tfrac{\varepsilon}{3} \ \forall n \geq n_\varepsilon, \ \forall x \in X.$$

Da außerdem auch f_{n_ε} stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$d_Y(f_{n_\varepsilon}(x), f_{n_\varepsilon}(x_0)) < \tfrac{\varepsilon}{3} \ \forall x \in X \text{ mit } d_X(x, x_0) < \delta.$$

D.h. aber, dass für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$ gilt, dass

$$\begin{aligned} & d_Y(f(x), f(x_0)) \\ \leq\ & d_Y(f(x), f_{n_\varepsilon}(x)) + d_Y(f_{n_\varepsilon}(x), f_{n_\varepsilon}(x_0)) + d_Y(f_{n_\varepsilon}(x_0), f(x_0)) \\ <\ & \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} \ = \ \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist f stetig. □

Bemerkung: Punktweise versus gleichmäßige Konvergenz

- Eine Folge $\{f_n\}$ von Abbildungen *konvergiert punktweise* gegen eine Abbildung f, falls $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$.
- Gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

- *Aber:* Sei f_n eine Folge von *stetigen* Abbildungen, die punktweise gegen f konvergieren. Dann muss f nicht unbedingt stetig sein.

  Beispiel: Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$. Dann konvergiert f_n punktweise gegen die nicht stetige Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0,1) \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Bemerkung: Vertauschung von Limes und Integral

- Eine Folge stetiger Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Abbildung $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

  Denn: f ist stetig und $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right| \leq (b-a)\|f - f_n\|_{[a,b]} \to 0.$

- Ist $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert, dann gilt die obige Gleichheit im allgemeinen nicht.

  Beispiel / Übg: Man betrachte, für $n \geq 2$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \max\{n - n^2|x - \frac{1}{n}|, 0\}$.

Der Raum stetiger Abbildungen auf kompakten Mengen

Seien X und Y zwei metrische Räume und bezeichne

$$C(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \textit{ stetig } \}$$

die Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y.

Ist X kompakt, dann definiert

$$d_\infty(f,g) := \max_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$$

eine Metrik auf $C(X,Y)$, die *Maximumsmetrik.*

Satz 40. *Sei X ein kompakter metrischer Raum und Y ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist $(C(X,Y), d_\infty)$ ein vollständiger metrischer Raum.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jede Cauchyfolge in $C(X,Y)$ eine *stetige* Grenzfunktion hat.

Sei $\{f_n\}$ eine Cauchyfolge in $C(X,Y)$ und sei $\varepsilon > 0$. D.h. es gibt ein $n_\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

D.h. aber, dass für jedes $x \in X$ die Folge $f_n(x)$ eine Cauchyfolge in Y ist und daher einen Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ hat.

Da die Metrik d_Y stetig ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} d_Y(f_n(x), f(x)) &= d_Y(f_n(x), \lim_{m\to\infty} f_m(x)) \\ &= \lim_{m\to\infty} d_Y(f_n(x), f_m(x)) \ < \ \varepsilon \end{aligned}$$

für jedes $x \in X$ und jedes $n \geq n_\varepsilon$. D.h. f_n konvergiert gleichmäßig gegen f. Aufgrund des vorherigen Satzes ist f stetig. □

4 Beschränkte Operatoren, Hilbertbasen, Fourier-Reihen

4.1 Beschränkte Operatoren, Darstellungssatz von Riesz

Beschränkte Operatoren

Definition 29. *Seien $(V_1, \|.\|_1)$ und $(V_2, \|.\|_2)$ zwei normierte Räume.*

Eine lineare Abbildung $F : V_1 \to V_2$ heißt beschränkt, falls es eine Konstante C gibt, so dass

$$\|F(u)\|_2 \leq C\|u\|_1 \quad \forall \quad u \in V_1.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\sup_{0\neq u\in V_1} \frac{\|Fu\|_2}{\|u\|_1} < \infty.$$

Die Zahl

$$\|F\| := \sup_{0\neq x\in V_1} \frac{\|Fx\|_2}{\|x\|_1}$$

heißt Operatornorm von F.

Bemerkungen/ÜA

- Durch die Operatornorm wird der VR

  $$L_b(V_1, V_2) := \{F \in L(V_1, V_2)| \quad \|F\| < \infty\}$$

  der beschränkten Operatoren zu einem normierten VR.

- Insbesondere ist $V' := L_b(V, \mathbb{K})$ ein normierter VR für jeden normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Hierbei ist $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) durch den Betrag normiert.

- Lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen sind beschränkt.

- Ist V_1 unendlich-dimensional, so gilt dies nicht: Sei $V_1 = V_2 = C^\infty([0,1])$ versehen mit der Norm $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} f(x)$, und sei $F = (.)'$ der Ableitungsoperator. Dann gilt für $f_n(x) := x^n$ dass $\|f_n\|_\infty = 1$ und $\|F(f_n)\|_\infty = n$.

Satz 41. *Eine lineare Abbildung $F : V_1 \to V_2$ zwischen normierten Vektorräumen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ und $(V_2, \|\cdot\|_2)$ ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist.*

Beweis. Ist F stetig, so ist F auch in $0 \in V_1$ stetig. D.h., zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|Fv\|_2 < 1, \text{ falls } \|v\|_1 < \delta.$$

Sei nun $u \in V_1$. Für $v := \frac{\delta}{2\|u\|_1} u$ gilt dann, dass $\|v\|_1 < \delta$, und somit

$$\|F(u)\|_2 = \frac{2\|u\|_1}{\delta} \|F(v)\|_2 < \frac{2\|u\|_1}{\delta}.$$

Damit ist F beschränkt.

Ist andererseits F beschränkt, d.h. $\|F(u)\|_2 \le C\|u\|_1 \; \forall u \in V_1$, so gilt

$$\|F(u) - F(u_n)\|_2 = \|F(u - u_n)\|_2 \le C\|u - u_n\|_1.$$

Somit konvergiert $F(u_n)$ gegen $F(u)$, falls $u_n \to u$. □

Orthogonalprojektion auf vollständige Unterräume

Satz 42. *Sei V ein Euklidischer oder Hermitescher VR und $U \subset V$ ein vollständiger Unterraum.*

(i) Dann existiert zu jedem $x \in V$ genau ein $x_U \in U$ mit kleinstem Abstand zu x, d.h.

$$\|x - x_U\| \le \|x - y\| \quad \textit{für alle} \quad y \in U.$$

(ii) Das Element $x_U \in U$ ist durch $x - x_U \in U^\perp$ charakterisiert.

(iii) Es gilt $V = U \oplus U^\perp$.

(iv) Die Zuordnung $x \mapsto x_U$ definiert eine stetige lineare Abbildung $P : V \to U$ (die sogenannte orthogonale Projektion auf U).

Beweis. (i) Sei $y_n \in U$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d := \inf_{y \in U} \|x - y\|$. (y_n) ist eine Cauchy-Folge, denn wegen der Parallelogrammgleichung gilt

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\|^2 \\
&\le 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4d^2 \overset{(m,n\to\infty)}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Aufgrund der Vollständigkeit von U konvergiert (y_n) in U, $x_U := \lim_{n\to\infty} y_n \in U$, und $\|x - x_U\| = d$, wegen der Stetigkeit der Norm.

Aus $x_U, x'_U \in U$ mit $\|x_U - x\| = \|x'_U - x\| = d$ folgt wie oben

$$\begin{aligned}
\|x_U - x'_U\|^2 &= 2\|x_U - x\|^2 + 2\|x'_U - x\|^2 - \|x_U + x'_U - 2x\|^2 \\
&= 4d^2 - \|x_U + x'_U - 2x\|^2 \le 4d^2 - 4d^2 = 0.
\end{aligned}$$

Das beweist die Eindeutigkeit.

Weiter im Beweis:

(ii) Für alle $y \in U$, $t \in \mathbb{R}$ gilt mit $z = x - x_U$:

$$d^2 = \|z\|^2 \leq \|z + ty\|^2 = d^2 + 2t\mathrm{Re}\,\langle z, y\rangle + t^2\|y\|^2.$$

Das ist nur möglich, wenn $\mathrm{Re}\langle z, y\rangle = 0$ für alle $y \in U$.

Analog zeigt man $\mathrm{Im}\langle z, y\rangle = 0$ für alle $y \in U$. Es folgt $z = x - x_U \perp U$.

Umgekehrt folgt aus $u \in U$ und $z = x - u \perp U$:

$$\|z\|^2 \leq \|z + y\|^2 = \|z\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{für alle} \quad y \in U,$$

d.h. $u = x_U$.

(iii) In (i-ii) haben wir gezeigt, dass jeder Vektor $x \in V$ eine eindeutige Darstellung $x = x_U + (x - x_U)$ besitzt mit $x_U \in U$ und $x - x_U \in U^\perp$. Das beweist $V = U \oplus U^\perp$.

(iv) Die Linearität der Abbildung $x \mapsto x_U$ folgt aus der Charakterisierung (ii). Aus der Orthogonalität der Zerlegung $V = U \oplus U^\perp$ folgt $\|x_U\| \leq \|x\|$ und somit die Stetigkeit von P. □

Satz 43 (Darstellungssatz von Riesz). *Sei V ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ (= $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und V' der Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen $V \to \mathbb{K}$.*

Dann ist durch

$$\phi(x) := \langle \cdot, x\rangle, \quad x \in V,$$

ein konjugiert-linearer Isomorphismus normierter Vektorräume $\phi : V \to V'$ gegeben.

Beweis.
Die Stetigkeit der Linearform $\phi(x) : V \to \mathbb{K}$ ergibt sich aus der CS-Ungleichung:

$$|\phi(x)(y)| = |\langle y, x\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{für alle} \quad y \in V.$$

Weiter im Beweis:
Die CS-Ungleichung liefert zunächst $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$.

Für $y = x$ erhalten wir Gleichheit in der CS-Ungleichung und somit $\|\phi(x)\| = \|x\|$. Es ist klar, dass ϕ konjugiert-linear ist, denn das Hermitesche Skalarprodukt ist konjugiert-linear im zweiten Argument. Da ϕ die Norm erhält, ist ϕ injektiv.

Es bleibt noch die Surjektivität von ϕ zu zeigen.

Sei dazu $0 \neq \alpha \in V'$ und $v \in V$ mit $\alpha(v) = 1$. Aufgrund der Stetigkeit von α ist $U = Kern\,\alpha \subset V$ vollständig und $V = U \oplus U^\perp$.

Wir setzen $x_0 := v - v_U \in U^\perp$, wobei $v_U \in U$ die Orthogonalprojektion von v in U ist.

Dann gilt $\alpha(x_0) = 1$ und für alle $y \in V$ ist daher

$$y = \underbrace{(y - \alpha(y)x_0)}_{\in \ker \alpha} + \alpha(y)x_0 \in U \oplus U^\perp.$$

Somit $\langle y, x_0\rangle = \alpha(y)\|x_0\|^2$ und $\alpha = \phi(\frac{x_0}{\|x_0\|^2})$. □

4.2 Orthonormale Familien und Hilbertbasen

Separabilität

Definition 30. *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

- *Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt dicht in X, falls ihr Abschluss gleich X ist, d.h. $\overline{Y} = X$.*

  Äquivalent dazu ist: $\forall\ x \in X, \forall\ \varepsilon > 0\ \exists y \in Y$, so dass $y \in B_\varepsilon(x)$.

- *(X, d) heißt separabel, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge in X gibt.*

Beispiel
Für jedes n ist $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$; jeder endlich-dimensionale Vektorraum über $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) ist separabel.

Bemerkung
ℓ^2 ist separabel, denn:

Die Folgen $x \in \ell^2$ mit $x_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ bilden eine abzählbare dichte Teilmenge S, d.h. jedes Element $x \in \ell^2$ ist Grenzwert einer Folge $x_k \in S$.

Weiterhin gilt:

Jeder unendlich-dimensionale separable komplexe Hilbertraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ ist isomorph zu ℓ^2,

genauer: es gibt einen Isomorphismus von Vektorräumen $\phi : \ell^2 \to V$, der

$$\langle \phi(x), \phi(y)\rangle_V = \langle x, y\rangle_{\ell^2}$$

für alle $x, y \in \ell^2$ erfüllt.

Für den Beweis dieser Isomorphie benutzt man Hilbertbasen (s.u.: Jede Hilbertbasis $B = (b_1, b_2, \ldots)$ von V definiert einen solchen Isomorphismus $\phi_B : \sum_k x_k e_k \mapsto \sum_k x_k b_k$).

Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Bilinearform oder Hermitesche Form auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *orthonormale Familie*, wenn $\langle u, u\rangle = 1$ und $\langle u, v\rangle = 0$ für alle $u, v \in U$ mit $u \neq v$.

Satz 44. *Sei V ein separabler Euklidischer oder Hermitescher VR.*

Dann ist jede orthonormale Familie $(v_i)_{i \in I}$ abzählbar.

Beweis.
Für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt $\|v_i - v_j\| = \sqrt{2}$.

Sei $A \subset V$ eine abzählbare dichte Teilmenge.

Zu jedem $i \in I$ existiert $a(i) \in A$ mit $\|v_i - a(i)\| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Wir zeigen, dass die Zuordnung $I \to A, i \mapsto a(i)$, injektiv ist:

$$\begin{aligned} \|a(i) - a(j)\| &= \|v_i - v_j + a(i) - v_i + v_j - a(j)\| \\ &\geq \|v_i - v_j\| - \|a(i) - v_i\| - \|v_j - a(j)\| > 0 \end{aligned}$$

für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$. □

Satz 45 (Besselsche Ungleichung). *Sei V ein Euklidischer oder Hermitescher VR und $(v_1, v_2, \ldots)$ eine (endliche oder unendliche) orthonormale Familie.*

Dann gilt für alle $x \in V$:

$$\sum_k |\langle x, v_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$x = \sum_k \langle x, v_k \rangle v_k.$$

Beweis. Wir betrachten den endlich-dimensionalen (und somit vollständigen) Unterraum

$$U_N := \operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_N\} \subset V.$$

Sei $x_N \in U_N$ die Orthogonalprojektion von x in U_N.
Es gilt $x_N = \sum_{k=1}^N \langle x, v_k \rangle v_k$, denn $x - \sum_{k=1}^N \langle x, v_k \rangle v_k \perp U_N$.
Aus der orthogonalen Zerlegung $x = x_N + (x - x_N)$ folgt dann

$$\sum_{k=1}^N |\langle x, v_k \rangle|^2 = \|x_N\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Daraus folgt die Besselsche Ungleichung und die absolute Konvergenz der Reihe $x_\infty := \sum_k \langle x, v_k \rangle v_k$.
Für x_∞ gilt $x_\infty \perp x - x_\infty$ und

$$\|x_\infty\|^2 = \|x\|^2 \iff \|x - x_\infty\|^2 = 0 \iff x = x_\infty.$$

□

Definition 46. Sei V ein Euklidischer oder Hermitescher VR.

Eine orthonormale Familie $(v_1, v_2, \ldots)$ heißt *Hilbertbasis*, wenn jeder Vektor $x \in V$ eine Darstellung $x = \sum_k \langle x, v_k \rangle v_k$ besitzt.

Beispiele

(i) Falls $\dim V < \infty$, so sind Hilbertbasen nichts anderes als orthonormale bzw. unitäre Basen.

(ii) Sei $V = \ell^2$ der Hilbertraum der quadratisch summierbaren Folgen $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Die Folgen $e_j \in \ell^2$ mit $e_j(k) := \delta_{jk}$ $(j, k \in \mathbb{N})$ bilden eine Hilbertbasis $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$, die sogenannte *kanonische Hilbertbasis* von ℓ^2.

$(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist keine Vektorraumbasis, denn die lineare Hülle der e_j ist

$$\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid x_k := x(k) = 0 \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N}\} \subsetneq \ell^2.$$

(Bei der linearen Hülle sind nur endliche Linearkombinationen zugelassen!)

Satz 47. *Für eine orthonormale Familie $B = (b_1, b_2, \dots)$ von Vektoren eines Euklidischen oder Hermiteschen VR V sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathrm{span}\{b_1, b_2, \dots\}$ *ist dicht in* V*.*

(ii) B *ist eine Hilbertbasis.*

(iii) Für alle $x, y \in V$ *gilt*
$$\langle x, y\rangle = \sum_k \langle x, b_k\rangle \overline{\langle y, b_k\rangle}.$$

(iv) Für alle $x \in V$ *gilt die Parsevalsche Gleichung*
$$\|x\|^2 = \sum_k |\langle x, b_k\rangle|^2.$$

Beweis.

(i) $\Rightarrow$(ii): Zu $\mathbf{x} \in V$ existiert $\mathbf{x_i} \in \mathrm{span}\{b_1, b_2, \dots\}$ mit $\mathbf{x} = \lim_{i\to\infty} \mathbf{x_i}$.

Wir können annehmen, dass
$$\mathbf{x_i} \in U_i := \mathrm{span}\{b_1, \dots, b_{N_i}\},$$
wobei $N_i \in \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Folge ist.

Für die orthogonale Projektion $\mathbf{x_i'} = \sum_{k=1}^{N_i} \langle \mathbf{x}, b_k\rangle b_k$ von $\mathbf{x}$ in U_i gilt
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x_i'}\| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{x_i}\|$$
und somit
$$\mathbf{x} = \lim_{i\to\infty} \mathbf{x_i'} = \sum_k \langle \mathbf{x}, b_k\rangle b_k.$$

Weiter im Beweis:

(ii)$\Rightarrow$(iii): Wenn $B = (b_1, b_2, \dots)$ eine Hilbertbasis ist, so können wir $x, y \in V$ schreiben als
$$x = \sum_i x_i b_i, \quad y = \sum_j y_j b_j,$$
wobei $x_i = \langle x, b_i\rangle$, $y_j = \langle y, b_j\rangle$.

Daraus folgt
$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle \sum_i x_i b_i, y\rangle = \sum_i x_i \langle b_i, y\rangle \\ \langle b_i, y\rangle &= \langle b_i, \sum_j y_j b_j\rangle = \sum_j \overline{y}_j \langle b_i, b_j\rangle = \overline{y}_i\end{aligned}$$

und somit
$$\langle x, y\rangle = \sum_i x_i \overline{y}_i.$$

Weiter im Beweis:

(iii)$\Rightarrow$(iv): Setze $x = y$.

(iv)$\Rightarrow$(i): Aus der Parsevalschen Gleichung folgt (nach dem Satz über die Besselsche Ungleichung), dass $x = \sum_k \langle x, b_k \rangle b_k$ für alle $x \in V$.

Damit gilt (i).

$\square$

Satz 48 (Hilbertbasen)**.** *Jeder unendlichdimensionale separable Hilbertraum V besitzt eine abzählbare unendliche Hilbertbasis $B = (b_1, b_2, \ldots)$.*

Für den Beweis des Satzes benötigen wir das Zornsche Lemma, das aus dem Auswahlaxiom der Mengenlehre folgt.

(Mit dem Zornschen Lemma beweist man auch, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt.)

Definition 31. *Eine Relation $\leq$ auf einer Menge X heißt Ordnungsrelation, wenn folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in X$ erfüllt sind:*

$x \leq x$,

aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$ und

aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$.

Die Ordnungsrelation heißt total, wenn für alle $x, y \in X$ eine der beiden Ungleichungen $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt.

$x \in X$ heißt maximal, wenn es kein $y \in X$ mit $x < y$ gibt (d.h. mit $x \leq y$ und $x \neq y$).

$x \in X$ heißt eine obere Schranke von $Y \subset X$, falls $y \leq x$ für alle $y \in Y$.

Lemma 49 (Zornsches Lemma)**.** *Auf der Menge X sei eine Ordnungsrelation $\leq$ gegeben, derart dass jede total geordnete Teilmenge $Y \subset X$ eine obere Schranke besitzt. Dann hat X ein maximales Element.* $\square$

Zum Beweis des Satzes.

Man zeigt mit dem Zornschen Lemma, dass sich jede orthonormale Familie F_0 in einem separablen Hilbertraum ergänzen lässt zu einer unter allen orthonormalen Familien, die F_0 enhalten, maximalen Familie $B = (b_1, b_2, \ldots)$. (Hierbei sei X die durch $\subseteq$ geordnete Menge aller orthonormalen Familien, die F_0 enhalten. Für jede total geordnete Teilmenge $Y \subset X$ bildet $\cup_{F \in Y} F$ eine obere Schranke.)

Nun ist B eine Hilbertbasis, denn aus $y := x - \sum_k \langle x, b_k \rangle b_k \perp b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ folgt $y = 0$. $\square$

4.3 Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Sei V der Vektorraum der 2π-periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so dass $f|_{[0,2\pi]}$ integrierbar ist.

ÜA.
Die Funktionen $e_k(x) := \exp(ikx)$, $k \in \mathbb{Z}$, bilden ein orthonormales System bezüglich der Hermiteschen Form

$$(*) \quad \langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx, \quad f, g \in V.$$

$(*)$ ist positiv semi-definit, d.h. $\langle f, f\rangle \geq 0$ für alle $f \in V$.

Auf dem Unterraum der stetigen Funktionen ist $(*)$ positiv definit und somit ein Skalarprodukt.

Die zugehörige Norm bezeichnen wir mit $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

Auf demselben Raum können wir auch die Norm $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$ betrachten.

Definition

Ein *trigonometrisches Polynom* vom Grad $\leq n$ ist eine Linearkombination

$$\sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikx}, \quad \gamma_k \in \mathbb{C}.$$

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, so dass $f|_{[0,2\pi]}$ integrierbar ist. Die komplexe Zahl $c_k := \langle f, e_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$ heißt *k-ter Fourier-Koeffizient* und das trigonometrische Polynom $F_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$ heißt *n-tes Fourier-Polynom* von f.

Die Reihe $(F_n(f))_{n=0,1,...}$ heißt *Fourier-Reihe* von f.

Bemerkung.
Es gilt

$$F_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

wobei

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx. \end{aligned}$$

Wenn f reellwertig ist, dann ist $c_{-k} = \overline{c}_k$ und $F_n(f)$ ist reellwertig.

Satz 50 (Fourier-Polynome und Besselsche Ungleichung). *(i) $F_n(f)$ ist die beste Approximation im quadratischen Mittel an $f \in V$ durch ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n$, d.h. $\|f - F_n(f)\|_2 = \inf_{g\in V_n} \|f - g\|_2$, wobei $V_n := \mathrm{span}\{e_k | -n \leq k \leq n\}$.*

(ii) Es gilt $\|f-F_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|F_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$.

(iii) Für die Fourier-Koeffizienten c_k *von* $f \in V$ *gilt die Besselsche Ungleichung*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f-F_n(f)\|_2 = 0.$$

Beweis. (ii) kann man direkt nachrechnen.
Um (i) zu zeigen, berechnen wir analog für $g = \sum_{k=-n}^{n} d_k e_k \in V_n$:

$$\begin{aligned} \|f-g\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} (\overline{d}_k c_k + d_k \overline{c_k}) + \sum_{k=-n}^{n} |d_k|^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \|F_n(f)-g\|_2^2. \end{aligned}$$

(iii) folgt nun: Ist $(e_1, e_2, \dots)$ eine (endliche oder unendliche) orthonormale Familie, so gilt (für alle f)

$$\sum_k |\underbrace{\langle f, e_k\rangle}_{c_k}|^2 \leq \|f\|_2^2$$

und Gleichheit gilt genau bei Konvergenz der Reihe $\sum_k c_k e_k$ im quadratischen Mittel gegen f. $\square$

Wir wollen nun zeigen, dass in der Besselschen Ungleichung ¨ = ¨ gilt (Parsevalsche Gleichung).

Satz 51 (Konvergenz der Fourier-Reihe im quadratischen Mittel)**.** *Sei* V *der Vektorraum der* 2π*-periodische Funktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*, so dass* $f|_{[0,2\pi]}$ *integrierbar ist.*

(i) Für alle $f \in V$ *gilt*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

(ii) Die Fourier-Reihe konvergiert im quadratischen Mittel gegen f*, d.h.* $\lim_{n\to\infty} \|f - F_n(f)\|_2 = 0$.

Zum Beweis: Aus dem vorhergehenden Satz wissen wir, dass (i) und (ii) äquivalent sind. Es genügt also, (ii) zu zeigen.

Lemma 52. *Sei* $f \in V$ *so, dass* $f|_{[0,2\pi]}$ *eine Treppenfunktion ist.*

Dann konvergiert $F_n(f)$ *im quadratischen Mittel gegen* f.

Weiter im Beweis des Satzes:

$f|_{[0,2\pi]}$ ist als Riemann-integrierbare Funktion beschränkt. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass f reellwertig ist und $|f| \leq 1$.

Dann existieren zu $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $-1 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$, so dass $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\psi(x) - \varphi(x))dx \leq \frac{\varepsilon^2}{8}$.

Mit $(\psi - \varphi)^2 \leq 2(\psi - \varphi)$ folgt daraus $\|f - \varphi\|_2^2 \leq \|\psi - \varphi\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$ und somit $\|f - \varphi\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Wegen des Lemmas existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|\varphi - F_n(\varphi)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$.

Mit $g = f - \varphi$ gilt $\|g - F_n(g)\|_2 \leq \|g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und somit $\|f - F_n(f)\|_2 \leq \|g - F_n(g)\|_2 + \|\varphi - F_n(\varphi)\|_2 < \varepsilon$. □

Beweis des Lemmas:

Wir können annehmen, dass $f|_{(0,a)} = 1$ und $f|_{(a,2\pi)} = 0$, denn jede Treppenfunktion lässt sich als Linearkombination solcher Funktionen darstellen.

Als Fourier-Koeffizienten erhalten wir $c_0 = \frac{a}{2\pi}$ und

$$c_k = \frac{i}{2\pi k} e^{-ikx}\Big|_0^a, \quad k \in \mathbb{N}, k \neq 0.$$

Mit $|c_k|^2 = \frac{1 - \cos ka}{2\pi^2 k^2}$ $(k \neq 0)$ erhalten wir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos ka}{k^2}.$$

Weiter im Beweis:

Mit Hilfe der für alle $x \in [0, 2\pi]$ gültigen Formel

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2} = \left(\frac{x - \pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$$

erhalten wir

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}((\frac{a - \pi}{2})^2 - \frac{\pi^2}{12}) = \frac{a}{2\pi} = \|f\|_2^2.$$

Also konvergiert $F_n(f)$ im quadratischen Mittel gegen f.

Weiter im Beweis: Zum Beweis von $(*)$:

Wir behaupten:

$$(**) \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{für alle} \quad x \in (0, 2\pi).$$

Darf man $-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{x-\pi}{2}$ gliedweise integrieren, so erhält man

$$F(x):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}=\frac{(x-\pi)^2}{4}+c,$$

und durch weitere gliedweise Integration

$$0=\int_0^{2\pi}F(x)dx=\left.\frac{(x-\pi)^3}{12}\right|_0^{2\pi}+2\pi c=\frac{\pi^3}{6}+2\pi c,$$

also $c=-\frac{\pi^2}{12}$, und damit gilt die Behauptung $(*)$.

Weiter im Beweis:

Um die gliedweise Integration zu rechtfertigen, stellen wir zuerst fest, dass die Reihe $F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$ absolut und gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert.

Man muss außerdem die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ gegen $\frac{\pi-x}{2}$ auf jedem kompakten Teilintervall $[\delta,2\pi-\delta]$ von $(0,2\pi)$ zeigen.

[Dazu schätzen wir zunächst $s_n(x):=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}\right)$ ab:

$$|s_n(x)|\le\left|\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}\right|=\left|e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right|\le\frac{2}{|e^{ix/2}-e^{-ix/2}|}\le\frac{1}{\sin\delta/2}.$$

Weiter im Beweis: Aus $|s_n(x)|\le\frac{1}{\sin\delta/2}=:\sigma$ erhalten wir weiter

$$\left|\sum_{k=n}^{m}\frac{\sin kx}{k}\right|=\left|\sum_{k=n}^{m}\frac{s_k(x)-s_{k-1}(x)}{k}\right|$$

$$=\left|\sum_{k=n}^{m}s_k(x)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{s_m(x)}{m+1}-\frac{s_{n-1}(x)}{n}\right|$$

$$\le\sigma\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n}\right)=\frac{2\sigma}{n}.$$

Also $\left|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\right|\le\frac{2\sigma}{n}$, woraus die gleichmäßige Konvergenz der Reihe folgt.]

Es bleibt noch $(**)$ zu zeigen.

Weiter im Beweis:

Es gilt $\frac{\sin kx}{k}=\int_{\pi}^{x}\cos kt\,dt$ und

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos kt &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(e^{ikt}+e^{-ikt})=\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt}-\frac{1}{2}\\ &= \frac{e^{-int}(1-e^{i(2n+1)t})}{2(1-e^{it})}-\frac{1}{2}=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Lemma 53. *Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt mit $r \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{|r|\to\infty} \int_a^b f(x) \sin rx \, dx = 0.$$

Beweis. partielle Integration. □

Weiter im Beweis:

Mit Hilfe des Lemmas erhalten wir schließlich:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \lim_{n\to\infty} \int_{\pi}^{x} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt - \frac{x-\pi}{2} = \frac{\pi - x}{2}.$$

□

Bemerkung

Aus der Besselschen Ungleichung folgt, dass die Folgen c_k, c_{-k} quadratisch summierbare komplexe Zahlenfolgen sind, d.h. Elemente von $\ell^2(\mathbb{C})$.

Aus der Parsevalschen Gleichung folgt die Vollständigkeit des ON-Systems $e_k(x), k \in \mathbb{Z}$.

(Die $e_k(x), k \in \mathbb{Z}$ bilden eine Hilbertbasis des Hilbertraums der L^2-Funktionen auf $[0, 2\pi]$, den wir im Teil III einführen werden.)

Satz 54 (Fourierentwicklung). *Sei $f \in V$ stetig und stückweise C^1, d.h. es gibt eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 2\pi$, so dass $f_k := f|_{[t_{k-1},t_k]}$ von der Klasse C^1 ist, $k = 1, \dots, r$.*

Dann konvergiert $F_n(f)$ gleichmäßig gegen f.

Beweis.

Sei φ die periodische Funktion mit $\varphi|_{[t_{k-1},t_k)} = f_k'$.

Die Fourier-Koeffizienten c_n von f ergeben sich durch partielle Integration aus den Fourier-Koeffizienten γ_n von φ:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)e^{-inx} dx = \frac{i}{n} f(x)e^{-inx}\Big|_{t_{k-1}}^{t_k} - \frac{i}{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi(x)e^{-inx} dx.$$

Wegen der Periodizität von f erhält man daraus $c_n = -\frac{i}{n}\gamma_n$ $(n \neq 0)$.

Weiter im Beweis:

Wegen $|ab| \le \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$ folgt nun

$$|c_n| \le \frac{1}{2}(\frac{1}{n^2} + |\gamma_n|^2).$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ und $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_n|^2 < \infty$ (Besselsche Ungleichung) ist $\sum |c_n|$ (von x unabhängige) absolut konvergente Majorante der Fourier-Reihe, und daraus folgt die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe $F_n(f)$ gegen eine stetige Grenzfunktion g.

Andererseits konvergiert $F_n(f)$ im quadratischen Mittel gegen f.

Das ist nur möglich, wenn $f = g$, denn beide Funktionen sind stetig. □

5 Differentialrechung mehrerer Veränderlicher

5.1 Richtungsableitung

Differentialrechung mehrerer Veränderlicher Richtungsableitung

Definition 32. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor.*

(i) Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $\mathbf{x} \in U$ in Richtung v differenzierbar, wenn die Funktion

$$\tilde{f} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(\mathbf{x} + tv),$$

bei $t = 0$ differenzierbar ist.

(Hierbei ist $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\mathbf{x} + tv \in U$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.)

(ii) Die Zahl

$$(\partial_v f)(\mathbf{x}) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\mathbf{x} + tv) = \tilde{f}'(0)$$

heißt Ableitung von f an der Stelle $\mathbf{x}$ in Richtung v oder auch Richtungsableitung.

Erinnerung:
$\tilde{f}$ ist differenzierbar in 0, wenn $\lim_{t\to 0} \frac{\tilde{f}(t)-\tilde{f}(0)}{t}$ existiert.

Die Ableitung $\tilde{f}'(0)$ an der Stelle 0 ist dann gegeben durch

$$\tilde{f}'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\tilde{f}(t) - \tilde{f}(0)}{t} \; = \; \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + tv) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

Rechenregeln für die Richtungsableitung

Satz 55. *Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die beide in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar sind. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\partial_v(f+g)(\mathbf{x}) &= \partial_v(f)(\mathbf{x}) + \partial_v(g)(\mathbf{x}) \\
\partial_v(\lambda f)(\mathbf{x}) &= \lambda \partial_v(f)(\mathbf{x}) \quad \textit{für } \lambda \in \mathbb{R}, \\
\partial_v(f \cdot g)(\mathbf{x}) &= \partial_v(f)(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \partial_v(g)(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Ist $g(\mathbf{x}) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in $\mathbf{x}$ in Richtung v differenzierbar, und es gilt:

$$\partial_v \left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}) \; = \; \frac{\partial_v(f)(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \partial_v(g)(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})^2}.$$

Der **Beweis** folgt aus den Rechenregeln für die differenzierbaren reellen Funktionen $\tilde{f}$ und $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\tilde{f}(t) := f(\mathbf{x} + tv)$, $\tilde{g}(t) = g(\mathbf{x} + tv)$. $\square$

5.2 Partielle Ableitungen

Partielle Ableitungen

Definition 33. *Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$.*

- *Die Funktion f heißt an der Stelle $\mathbf{x} \in U$ partiell differenzierbar, wenn f an der Stelle $\mathbf{x}$ in alle Koordinatenrichtungen e_i differenzierbar ist.*
- *Die Zahl*
$$(\partial_i f)(\mathbf{x}) := (\partial_{e_i} f)(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \ldots n,$$
heißt i-te partielle Ableitung von f an der Stelle $\mathbf{x}$.
- *f heißt partiell differenzierbar, wenn f in allen Punkten $\mathbf{x} \in U$ partiell differenzierbar ist.*
- *Die Funktion $\partial_i f : U \to \mathbb{R}$ heißt i-te partielle Ableitung von f.*

  Man schreibt dafür auch
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Bemerkung
Die i-te partielle Ableitung $(\partial_i f)(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ ist genau die Ableitung der Funktion $h(t) := f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ an der Stelle $t = x_i$:

$$(\partial_i f)(\mathbf{x}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_n) = h'(x_i).$$

Beim Berechnen der i-ten partiellen Ableitung sind also die Variablen x_j für $j \neq i$ als Konstanten zu behandeln. Differenziert wird nach der Variablen x_i.

Beispiel
Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$, ist partiell differenzierbar und

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\|\mathbf{x}\|^2) = 2x_i.$$

Beispiel
Partielle Differenzierbarkeit impliziert im Allgemeinen nicht die Stetigkeit!

Sei

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq 0 \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f ist nicht stetig in $(0, 0)$, aber alle Richtungsableitungen existieren:

Sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. In $p_0 = (0,0)$ gilt dann

$$\frac{f(p_0 + tv) - f(p_0)}{t} = \frac{f(tv)}{t} = \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t(t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4)} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4}$$
$$\overset{t\to 0}{\to} \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1}, & v_1 \neq 0 \\ 0, & v_1 = 0 \end{cases}$$

D.h.(für $v = (1,0)$ bzw. $v = (0,1)$): $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$.

5.3 Höhere partielle Ableitungen

Höhere partielle Ableitungen

Definition 34. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$.*

(i) Für $k \geq 2$ definiert man rekursiv: f heißt k-mal partiell differenzierbar, wenn f partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ (k-1)-mal partiell differenzierbar sind.

(f heißt einmal partiell differenzierbar, wenn f partiell differenzierbar ist.)

(ii) f heißt k-mal stetig differenzierbar, wenn f k-mal partiell differenzierbar ist und alle k-ten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} := \partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f$$

stetig sind.

Lemma von Schwarz

Satz 56 (Hermann Amandus Schwarz)**.** *Sei $f : U \to \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen) zweimal stetig differenzierbar.*

Dann gilt für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f.$$

Beweis. Da es nur um zwei Koordinatenrichtungen e_i und e_j geht, können wir annehmen, dass $n = 2$.

Wir berechnen die zweiten partiellen Ableitungen an der Stelle $(x_0, y_0) \in U$.

Wir können annehmen, dass $(x_0, y_0) = (0,0)$ und dass U ein Quadrat $Q = \{(x,y) | \, |x| < \varepsilon \text{ und } |y| < \varepsilon\}$ enthält ($\varepsilon > 0$).

Weiter im Beweis:

Nach dem Mittelwertsatz angewendet auf die Funktion $g(x) = f(x,y) - f(x,0)$ gibt es zu $(x,y) \in Q$ ein $\xi \in (-|x|, |x|)$ mit

$$(1) \quad g(x) - g(0) = xg'(\xi) = x(\partial_1 f(\xi, y) - \partial_1 f(\xi, 0)).$$

Anwendung des MWS auf $y \mapsto \partial_1 f(\xi, y)$ liefert $\eta \in (-|y|, |y|)$ mit

$$(2) \quad \partial_1 f(\xi, y) - \partial_1 f(\xi, 0) = y \partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta).$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(3) \quad g(x) - g(0) = xy \partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta).$$

Analog ergibt sich mit $h(y) = f(x, y) - f(0, y)$

$$(3') \qquad h(y) - h(0) = xy \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}),$$

wobei $|\tilde{\xi}| < |x|$ und $|\tilde{\eta}| < |y|$.

Weiter im Beweis:

Aus (3) und (3') erhalten wir wg. $g(x) - g(0) = h(y) - h(0)$:

$$(4) \quad \partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta) = \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}).$$

Die Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen erlaubt nun den Grenzübergang $(x, y) \to (0, 0)$ in (4), woraus sich $\partial_2 \partial_1 f(0, 0) = \partial_1 \partial_2 f(0, 0)$ ergibt. $\square$

5.4 Der Gradient einer Funktion

Der Gradient einer Funktion

Definition 35 (Gradient)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ an der Stelle $\mathbf{x} \in U$ partiell differenzierbar. Der Spaltenvektor*

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(\mathbf{x}) \\ \partial_2 f(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

heißt Gradient von f an der Stelle $\mathbf{x}$.

Bemerkung

Aus den Rechenregeln für die Richtungsableitungen erhält man auch Rechenregeln für den Gradienten. Z. B. ist grad additiv und für zwei in $\mathbf{x}$ partiell differenzierbare Funktionen gilt:

$$\operatorname{grad}(f \cdot g)(\mathbf{x}) \;=\; f(\mathbf{x}) \cdot (\operatorname{grad}\, g)(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \cdot (\operatorname{grad}\, f)(\mathbf{x}).$$

Beispiel

Sei $r = r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ die Euklidische Norm von $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

Dann ist die rotationssymmetrische Funktion $F(\mathbf{x}) = f(r) = f(r(\mathbf{x}))$ auf $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar.

Die partiellen Ableitungen erhält man mittels der Kettenregel:

$$\partial_i F(r) = f'(r)\partial_i r$$
$$\partial_i r = \partial_i \sqrt{r^2} = \frac{1}{2r}\partial_i \|\mathbf{x}\|^2 = \frac{x_i}{r}.$$

Der Gradient ist daher $\mathrm{grad} r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r}$ und somit

$$\mathrm{grad}\, F(\mathbf{x}) = f'(r)\mathrm{grad}\, r(\mathbf{x}) = f'(r)\frac{\mathbf{x}}{r},$$

5.5 Divergenz eines Vektorfeldes

Divergenz eines Vektorfeldes

Definition 36 (Divergenz)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

(i) Eine Abbildung $F = \sum_{i=1}^m F_i e_i : U \to \mathbb{R}^m$ heißt (in $\mathbf{x}$) partiell differenzierbar, wenn ihre Komponentenfunktionen F_i, $i = 1, 2, \ldots m$, (in $\mathbf{x}$) partiell differenzierbar sind.

(ii) Ein Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\mathbf{v} : U \to \mathbb{R}^n$. (Man denkt sich an jeden Punkt $\mathbf{x} \in U$ den Vektor $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ angeheftet.)

(iii) Für ein in $\mathbf{x} \in U$ partiell differenzierbares Vektorfeldes $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i e_i : U \to \mathbb{R}^n$ ist die Divergenz an der Stelle $\mathbf{x}$ gegeben durch

$$\mathrm{div}\, \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \partial_i v_i(\mathbf{x}).$$

Leibnizregel für die Divergenz

Satz 57. *Sei $\mathbf{v}$ ein in $\mathbf{x}$ partiell differenzierbares Vektorfeld und f eine in $\mathbf{x}$ partiell differenzierbare Funktion. Dann ist $f \cdot \mathbf{v}$ ein in $\mathbf{x}$ partiell differenzierbares Vektorfeld und es gilt*

$$\mathrm{div}(f\mathbf{v})(\mathbf{x}) \;=\; \langle \mathrm{grad}\ f(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x})\rangle + f(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{div}\ \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus der Leibnizregel für Richtungsableitungen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(f \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \partial_i (f \cdot v_i)(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{i=1}^n (\partial_i f(\mathbf{x}) \cdot v_i(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \cdot \partial_i v_i(\mathbf{x})) \\
&= \langle \mathrm{grad}\ f(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x})\rangle + f(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

□

5.6 Der Laplace-Operator

Der Laplace-Operator

Definition 37 (Laplace-Operator). *Der Gradient einer zweimal partiell differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist ein partiell differenzierbares Vektorfeld* $\operatorname{grad} f : U \to \mathbb{R}^n$.

Somit definiert

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f$$

eine Funktion $U \to \mathbb{R}$.

- *Der Differentialoperator Δ heißt Laplace-Operator.*
- *Lösungen f der (Laplace- oder auch Potential-)Gleichung*

$$\Delta f = 0$$

heißen harmonische Funktionen.

Leibnizregel für den Laplace Operator

Aus der Leibnizregel für div und grad erhalten wir eine Leibnizregel für den Laplace-Operator.

Satz 58. *Seien f und g zwei zweimal partiell differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\Delta(f \cdot g) \;=\; f \cdot \Delta g + g \cdot \Delta f + 2\langle \operatorname{grad}\, f, \operatorname{grad}\, g\rangle.$$

Beispiel: Rotationssymmetrische Potentiale
Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion, $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ die Norm von $\mathbf{x}$, d.h. $r(\mathbf{x}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ und $F(\mathbf{x}) = f(r(\mathbf{x}))$ die zugehörige rotationssymmetrische zweimal partiell differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Dann gilt $\partial_i F(\mathbf{x}) = f'(r)\frac{x_i}{r}$ und

$$\partial_j \partial_i F(\mathbf{x}) \;=\; f''(r)\frac{x_j x_i}{r^2} + f'(r)\frac{\delta_{ij} r - \frac{x_i x_j}{r}}{r^2} \;=\; f''(r)\frac{x_j x_i}{r^2} + f'(r)\left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3}\right)$$

Daraus folgt

$$\Delta F(\mathbf{x}) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r).$$

Jede Lösung der Differentialgleichung $f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0$ definiert somit eine rotationssymmetrische harmonische Funktion.

Für $n = 1$ erhalten wir $f(r) = ar + b$ als Lösung.

Für $n \geq 2$ setzten wir $h(r) := f'(r)$ und erhalten die Gleichung

$$h'(r) = -\frac{n-1}{r} h(r).$$

Unter der Voraussetzung, dass $h(r)$ keine Nullstellen hat, können wir die DGL für $n \geq 2$ wie folgt umformen:

$$\frac{n-1}{r} \;=\; -\frac{h'(r)}{h(r)} \;=\; -(\ln|h(r)|)'$$

Dies impliziert $\ln|h(r)| = -(n-1)\ln r + c$ und Anwenden von exp ergibt als Lösung

$$|h(r)| \;=\; \frac{e^c}{r^{n-1}}.$$

Somit ist $f(r) = \frac{a}{r^{n-2}} + b$ falls $n > 2$ und $f(r) = a \ln r + b$ für $n = 2$.

Für $n = 3$ erhalten wir mit $b = 0$ das *Newtonsche Gravitationspotential* $-G\frac{M}{r}$ einer im Nullpunkt konzentrierten Masse M. (Hierbei ist $G > 0$ die Gravitationskonstante.)

Ganz analog ist das *elektrische Potential* einer Punktladung Q gegeben durch $\gamma\frac{Q}{r}$. (Dabei ist wieder $\gamma > 0$ eine Konstante.)

Das Newtonsche Gravitationsfeld
Jede partiell differenzierbare Funktion $V : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ definiert ein Vektorfeld $-\mathrm{grad}V$.

Für das Newtonpotential $V(r) = -G\frac{M}{r}$ erhalten wir

$$-\mathrm{grad}V = -G\frac{M}{r^2}\frac{\mathbf{x}}{r}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

das *Newtonsche Gravitationsfeld.*

Die auf eine Probemasse m im Punkt $\mathbf{x}$ wirkende Kraft ist

$$F = -m\mathrm{grad}V = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{x}}{r}.$$

Beschreibt $t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ die Bewegung der Probemasse im Gravitationsfeld, so genügt diese nach dem Newtonschen Gesetz $F = m\ddot{\mathbf{x}}$ der (von $m \neq 0$ unabhängigen) Differentialgleichung

$$\ddot{\mathbf{x}} = -GM\frac{\mathbf{x}}{r^3}.$$

Das elektrostatische Feld
Für das elektrische Potential $V(r) = \gamma\frac{Q}{r}$ ergibt sich entsprechend

$$E = -\mathrm{grad}V = \gamma\frac{Q}{r^2}\frac{\mathbf{x}}{r}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

als *elektrisches Feld.*

Die auf eine Probeladung q im Punkt $\mathbf{x}$ wirkende Kraft ist

$$F = qE = \gamma\frac{qQ}{r^2}\frac{\mathbf{x}}{r}.$$

(Die elektrische Kraft ist abstoßend, wenn $qQ > 0$ und anziehend wenn $qQ < 0$.)

Die Bewegung einer Probeladung genügt der Differentialgleichung $\ddot{\mathbf{x}} = \gamma\frac{qQ}{m}\frac{\mathbf{x}}{r^3}$ ($m \neq 0$ ist die Masse der Probeladung).

5.7 Die Rotation eines Vektorfeldes

Das Vektorprodukt

Definition 38 (Vektorprodukt/Kreuzprodukt)**.** *Das Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt) von* $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i \in \mathbb{R}^3$ *und* $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{3} y_i e_i \in \mathbb{R}^3$ *ist der Vektor*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{y} \;\; &:= \;\; \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \\ &= \;\; (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3. \end{aligned}$$

Es gilt
Die durch das Kreuzprodukt definierte Abbildung

$$\times \; : \; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \; \to \; \mathbb{R}^3, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \; \mapsto \; \mathbf{x} \times \mathbf{y}$$

ist bilinear und schiefsymmetrisch.

Satz 59 (Eigenschaften des Vektorprodukts)**.** *Sei der* $\mathbb{R}^3$ *versehen mit der durch die Basis* (e_1, e_2, e_3) *gegebenen Orientierung. Für alle* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ *gilt dann:*

(i) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$.

(ii) $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ *ist senkrecht zu* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$.

(iii) $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2$.

(iv) $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \sin \varphi$, *wenn* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *und* $\varphi = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in [0, \pi]$.

(v) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *linear abhängig.*

(vi) Sind $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *linear unabhängig, so ist* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} \times \mathbf{y})$ *eine positiv orientierte Basis.*

(vii) Sind $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *orthonormal, so ist* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} \times \mathbf{y})$ *eine positiv orientierte Orthonormalbasis.*

Beweis. Übungsaufgabe □

Spatprodukt

Satz 60. *Für alle* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ *gilt:* $\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \det(\mathbf{x} \;\; \mathbf{y} \;\; \mathbf{z})$.

Beweis. Wegen der Trilinearität von $\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ und *det* genügt es, die Gleichung für $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \{e_1, e_2, e_3\}$ zu überprüfen.

Offenbar ist $\langle e_i \times e_j, e_k \rangle = 0 = \det(e_i \;\; e_j \;\; e_k)$, wenn zwei der drei Indizes übereinstimmen.

Sei (i, j, k) eine Permutation von $(1, 2, 3)$. Da (e_i, e_j) orthonormal ist, gilt $e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k$, wobei ε_{ijk} das Vorzeichen der Permutation ist.

Also $\langle e_i \times e_j, e_k \rangle = \varepsilon_{ijk} = \det(e_i \;\; e_j \;\; e_k)$ für jede Permutation. □

Bemerkung
Die alternierende Trilinearform $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \mapsto \langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ heißt *Spatprodukt.*

$|\langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle|$ ist das Volumen des durch $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ aufgespannten *Parallelepipeds* oder *Spats* $P = \{a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z} | a, b, c \in [0, 1]\}$.

Definition 39. *Sei* $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i e_i$ *ein partiell differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge* $U \subset \mathbb{R}^3$*.*

Das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$$

heißt Rotation von $\mathbf{v}$*.*

Bemerkung
Wir können den Gradienten als vektorwertigen Differentialoperator auffassen:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} : \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{part. diffb. } \} \quad &\to \quad \text{Vektorfelder auf } U \\ f \quad &\mapsto \quad \operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich formal (grad $\notin \mathbb{R}^3$!):

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \langle \operatorname{grad}, \mathbf{v} \rangle, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{grad} \times \mathbf{v}.$$

Satz 61. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^3$ *offen und* $f : U \to \mathbb{R}$*,* $\mathbf{v} : U \to \mathbb{R}^3$ *zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt*

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \quad \textit{und} \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0,$$

d.h. (formal): $\operatorname{grad} \times \operatorname{grad} \;\; f \;\; = \;\; 0 \quad \textit{und} \quad \langle \operatorname{grad}, \operatorname{grad} \times \mathbf{v} \rangle \;\; = \;\; 0.$

Beweis. Das rechnet man (unter Benutzung des Lemmas von Schwarz) direkt nach (ÜA). □

6 Differenzierbare Abbildungen

6.1 Differenzierbarkeit und Differential

Differenzierbarkeit

Definition 40 (Differenzierbarkeit)**.** *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $F : U \to \mathbb{R}^m$*.*

(i) *F heißt im Punkt $\mathbf{x} \in U$ (total) differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass*

$$\lim_{\xi \in \mathbb{R}^n,\ \xi \to 0} \frac{\|F(\mathbf{x}+\xi) - F(\mathbf{x}) - A(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0$$

(ii) *$F : U \to \mathbb{R}^m$ heißt differenzierbar, wenn F in allen Punkten $\mathbf{x} \in U$ differenzierbar ist.*

Satz 62 (und Definition Differential)**.** *Sei $F : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\mathbf{x}$. Dann wird durch $\lim_{\xi\to 0}(\|F(\mathbf{x}+\xi) - F(\mathbf{x}) - A(\xi)\|/\|\xi\|) = 0$ die lineare Abbildung $dF_{\mathbf{x}} := A$ eindeutig bestimmt. Sie heißt Differential (oder Ableitung) von F im Punkt $\mathbf{x}$. Im folgenden identifizieren wir oft $dF_{\mathbf{x}}$ mit ihrer beschreibenden Matrix.*

Beweis der Eindeutigkeit von A:
Seien A und B zwei lineare Abbildungen mit der geforderten Eigenschaft.
Mit der Dreiecksungleichung der Norm erhält man

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\xi\to 0} \frac{\|B(\xi) - A(\xi)\|}{\|\xi\|} \\
&\leq \lim_{\xi\to 0} \frac{\|F(\mathbf{x}+\xi) - F(\mathbf{x}) - A(\xi)\|}{\|\xi\|} + \lim_{\xi\to 0} \frac{\| - F(\mathbf{x}+\xi) + F(\mathbf{x}) + B(\xi)\|}{\|\xi\|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Setzt man nun $\xi = t\eta$ mit $\|\eta\| = 1$ so erhält man daraus wegen der Linearität von A und B, dass

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{|t|}(B(\eta) - A(\eta)) = B(\eta) - A(\eta),$$

und damit $A = B$. □

Beispiel
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$, ist überall differenzierbar, denn wegen

$$f(\mathbf{x}+\xi) = f(\mathbf{x}) + 2\langle \mathbf{x}, \xi\rangle + f(\xi) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \xi\rangle + \|\xi\|^2$$

gilt

$$\frac{f(\mathbf{x}+\xi) - f(\mathbf{x}) - 2\langle \mathbf{x}, \xi\rangle}{\|\xi\|} = \frac{\|\xi\|^2}{\|\xi\|} = \|\xi\| \to_{\xi\to 0} 0.$$

Das Differential $df_{\mathbf{x}} \in (\mathbb{R}^n)^*$ ist gegeben durch:

$$df_{\mathbf{x}}(\xi) = 2\langle \mathbf{x}, \xi\rangle = 2\mathbf{x}^t\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Also $df_{\mathbf{x}} = (2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n)$.

Jacobi-Matrix (Matrix der Ableitungen)

Satz 63. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^m$ in $\mathbf{x}$ differenzierbar. Dann existiert für jede Komponente F_j von F die Richtungsableitung $\partial_v F_j(\mathbf{x})$ für jede Richtung v und es gilt*

$$\partial_v F_j(\mathbf{x}) = (dF_j)_{\mathbf{x}}(v).$$

Insbesondere sind alle F_j in $\mathbf{x}$ partiell differenzierbar, d.h. F ist in $\mathbf{x}$ partiell differenzierbar. Weiterhin gilt:

$$dF_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(\mathbf{x}) & \cdots & \partial_n F_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 F_m(\mathbf{x}) & \cdots & \partial_n F_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathrm{grad} F_1(\mathbf{x}))^t \\ \vdots \\ (\mathrm{grad} F_m(\mathbf{x}))^t \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt auch Jacobi-Matrix

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $F = \sum_{j=1}^n F_j e_j$.

Da F differenzierbar ist, sind alle Komponentenfunktionen F_j differenzierbar. D.h. es gilt für jede Komponente F_j

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \to 0} \frac{|F_j(\mathbf{x} + tv) - F_j(\mathbf{x}) - (dF_j)_{\mathbf{x}}(tv)|}{|t| \|v\|} \\ &= \lim_{t \to 0} \left| \frac{F_j(\mathbf{x} + tv) - F_j(\mathbf{x})}{t} - (dF_j)_{\mathbf{x}}(v) \right|, \end{aligned}$$

d.h. $(dF_j)_{\mathbf{x}}(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} F_j(\mathbf{x} + tv) = \partial_v F_j(\mathbf{x})$.

Damit erhält man für $v = e_i$ die i-te partielle Ableitung $\partial_i F_j(\mathbf{x}) = (dF_j)_{\mathbf{x}}(e_i)$.

Dies gilt für jede Komponente F_j und somit

$$dF_{\mathbf{x}}(e_i) = \begin{pmatrix} \partial_i F_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \partial_i F_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = i\text{-te Spalte von } dF_{\mathbf{x}}.$$

Dies beweist die Formel für die Ableitungsmatrix. $\square$

Folgerung 64. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.*

Dann existiert für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ und es gilt

$$\partial_v f(x) = df_x v = \langle \mathrm{grad}\, f(x), v \rangle.$$

Die Jacobi-Matrix von f ist gegeben durch

$$df = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f) = (\mathrm{grad}\, f)^t \quad : \quad \begin{aligned} &U \to (\mathbb{R}^n)^*, \\ &x \mapsto df_x. \end{aligned}$$

Beispiel

Für die Koordinatenfunktionen $f(x) = x_i$ haben wir $\mathrm{grad}(x_i) = e_i$ und somit $dx_i = \langle e_i, \cdot \rangle$. Man schreibt daher für jede differenzierbare Funktion f auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ auch

$$df = \sum_{i=1}^n \partial_i f \; dx_i.$$

6.2 Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Satz 65. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F = \sum_{j=1}^m F_j e_j : U \to \mathbb{R}^m$ in $\mathbf{x}$ differenzierbar. Dann ist F ist in $\mathbf{x}$ stetig.*

Beweis. Sei $\mathbf{x}_n := \mathbf{x} + \xi_n$ mit $\xi_n \to 0$ eine Folge, die gegen $\mathbf{x}$ konvergiert. Dann ist wegen der Dreiecksungleichung

$$\|F(\mathbf{x}_n) - F(\mathbf{x})\| \leq \underbrace{\frac{\|F(\mathbf{x}_n) - F(\mathbf{x}) - dF_{\mathbf{x}}(\xi_n)\|}{\|\xi_n\|}}_{\to 0,\text{ da } f \text{ diffb.}} \underbrace{\|\xi_n\|}_{\to 0} + \|dF_x(\xi_n)\|.$$

Nun ist aber $dF_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear und damit stetig, d.h. auch $\|dF_{\mathbf{x}}(\xi_n)\| \to_{\xi_n \to 0} 0$. Also $\|F(\mathbf{x}_n) - F(\mathbf{x})\| \to 0$. □

Hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit

Satz 66. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F = \sum_{j=1}^m F_j e_j : U \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar und alle partiellen Ableitungen $\partial_i F_j$ seien an der Stelle $\mathbf{x} \in U$ stetig.*
Dann ist F in $\mathbf{x}$ differenzierbar.

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $m = 1$.
Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset U$ und $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in B_\varepsilon(0)$.
Für $i = 1, \ldots, n$ betrachten wir die Funktionen

$$\begin{aligned}
g_1(t) &:= F(x_1 + t, x_2, \ldots, x_n) \\
&\vdots \\
g_i(t) &:= F(x_1 + \xi_1, \ldots, x_{i-1} + \xi_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \ldots x_n) \\
&\vdots \\
g_n(t) &:= F(x_1 + \xi_1, \ldots, x_{n-1} + \xi_{n-1}, x_n + t)
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$g_i'(0) = \partial_i F(x_1 + \xi_1, \ldots, x_{i-1} + \xi_{i-1}, x_i, \ldots, x_n)$$

Weiter im Beweis:
Auf diese Funktionen wenden wir nun den MWS an und erhalten, für $i = 1 \ldots n$, Zahlen $\theta_i \in (-|\xi_i|, |\xi_i|)$ mit

$$\begin{aligned}
&F(x_1 + \xi_1, \ldots, x_i + \xi_i, x_{i+1}, \ldots x_n) - F(x_1 + \xi_1, \ldots, x_{i-1} + \xi_{i-1}, x_i, \ldots x_n) \\
&\quad = \xi_i \partial_i F(x_1 + \xi_1, \ldots, x_{i-1} + \xi_{i-1}, x_i + \theta_i, x_{i+1}, \ldots x_n)
\end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{(i)} &:= (x_1 + \xi_1, \ldots, x_i + \xi_i, x_{i+1}, \ldots x_n), i = 0, \ldots, n, \\
\mathbf{z}^{(i)} &:= (x_1 + \xi_1, \ldots, x_{i-1} + \xi_{i-1}, x_i + \theta_i, x_{i+1}, \ldots x_n), i \geq 1,
\end{aligned}$$

so erhält man daraus

$$F(\mathbf{x}+\xi) - F(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} F(\mathbf{y}^{(k)}) - F(\mathbf{y}^{(k-1)}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \xi_k \partial_k F(\mathbf{z}^{(k)}).$$

Ende des Beweises: Mit Hilfe der CS-Ungleichung ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\frac{|F(\mathbf{x}+\xi) - F(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i F(\mathbf{x})\xi_i|}{\|\xi\|} \;&=\; \frac{|\sum_{i=1}^{n}(\partial_i F(\mathbf{z}^{(i)}) - \partial_i F(\mathbf{x}))\xi_i|}{\|\xi\|} \\ &\le\; \|\sum_{i=1}^{n}(\partial_i F(\mathbf{z}^{(i)}) - \partial_i F(\mathbf{x}))e_i\|\end{aligned}$$

Für $\xi \to 0$ gilt auch $\mathbf{z}^{(i)} \to \mathbf{x}$.

Da nun alle partiellen Ableitungen stetig sind, bekommen wir

$$\partial_i F(\mathbf{z}^{(i)}) \to_{\xi \to 0} \partial_i F(\mathbf{x}),$$

und somit

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{|F(\mathbf{x}+\xi) - F(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i F(\mathbf{x})\xi_i|}{\|\xi\|} \;=\; 0.$$

Damit ist F differenzierbar. □

6.3 Rechenregeln und Kettenregel für das Differential

Satz 67. *Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, die in $\mathbf{x}$ differenzierbar ist. Dann gilt:*

- *Ist $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in $\mathbf{x}$ differenzierbar, so auch $F + G$ und es gilt*

$$d(F+G)_{\mathbf{x}} \;=\; dF_{\mathbf{x}} + dG_{\mathbf{x}}$$

- *Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist λF in $\mathbf{x}$ differenzierbar und es gilt*

$$d(\lambda F)_{\mathbf{x}} \;=\; \lambda dF_{\mathbf{x}}$$

- *Ist $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $\mathbf{x}$ differenzierbar, so auch $h \cdot F$ und es gilt*

$$d(h \cdot F)_{\mathbf{x}} \;=\; F(\mathbf{x}) \cdot dh_{\mathbf{x}} + h(\mathbf{x}) dF_{\mathbf{x}}.$$

- *Ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $\mathbf{x}$ differenzierbar und $g(\mathbf{x}) \neq 0$, so ist $\frac{1}{g}F$ in $\mathbf{x}$ differenzierbar, und es gilt:*

$$d\left(\frac{1}{g}F\right)_{\mathbf{x}} \;=\; \frac{1}{g(\mathbf{x})^2}\left(g(\mathbf{x})dF_{\mathbf{x}} - F(\mathbf{x}) \cdot dg_{\mathbf{x}}\right).$$

Satz 68 (Kettenregel)**.** *Seien $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^m$, $F(U) \subset V$ und $G : V \to \mathbb{R}^k$.*

Wenn F in $\mathbf{x}$ und G in $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ differenzierbar sind, dann ist $G \circ F : U \to \mathbb{R}^k$ in $\mathbf{x}$ differenzierbar und

$$d(G \circ F)_{\mathbf{x}} = dG_{\mathbf{y}} \circ dF_{\mathbf{x}}.$$

Beweis. Für $\mathbf{x} \in U,\ \mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \in V$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $\eta \in \mathbb{R}^m$ definieren wir

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &:= F(\mathbf{x}+\xi) - F(\mathbf{x}) - A\xi, \quad \text{wobei } A = dF_{\mathbf{x}}, \\ \psi(\eta) &:= G(\mathbf{y}+\eta) - G(\mathbf{y}) - B\eta, \quad \text{wobei } B = dG_{\mathbf{y}}, \end{aligned}$$

Dann gilt wegen der Differenzierbarkeit von F und G, dass

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = \lim_{\eta\to 0} \frac{\psi(\eta)}{\|\eta\|} = 0.$$

Weiter im Beweis:
Für das spezielle $\eta = F(\mathbf{x}+\xi) - \mathbf{y} = A\xi + \varphi(\xi)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (G\circ F)(\mathbf{x}+\xi) - (G\circ F)(\mathbf{x}) &= G(\mathbf{y}+\eta) - G(\mathbf{y}) \\ &= B\eta + \psi(\eta) \\ &= BA\xi + B\varphi(\xi) + \psi(\eta) \end{aligned}$$

D.h.

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{\|(G\circ F)(\mathbf{x}+\xi) - (G\circ F)(\mathbf{x}) - BA\xi\|}{\|\xi\|} \le \lim_{\xi\to 0} \frac{\|B\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} + \lim_{\xi\to 0} \frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\xi\|},$$

Nun ist aber wegen der Linearität von B

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{\|B\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} = \lim_{\xi\to 0} \|B\Big(\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|}\Big)\| \le \|B\|_{Op.-Norm} \lim_{\xi\to 0} \frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0.$$

Also genügt es, zu zeigen, dass $\lim_{\xi\to 0} \frac{\psi(\eta)}{\|\xi\|} = 0$.

Ende des Beweises: Dazu bemerkt man, dass $\eta \to 0$ falls $\xi \to 0$, denn wegen der Dreiecksungleichung ist

$$\|\eta\| = \|A\xi + \varphi(\xi)\| \le \|A\xi\| + \|\varphi(\xi)\| \to_{\xi\to 0} 0.$$

Somit gilt $\frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\eta\|} \to_{\xi\to 0} 0$. Aus der der Differenzierbarkeit von G und der Dreiecksungleichung folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\xi\|} &= \frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\eta\|}\frac{\|\eta\|}{\|\xi\|} = \frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\eta\|}\frac{\|A\xi+\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} \\ &\le \underbrace{\frac{\|\psi(\eta)\|}{\|\eta\|}}_{\to_{\xi\to 0} 0}\Big(\frac{\|A\xi\|}{\|\xi\|} + \underbrace{\frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|}}_{\to_{\xi\to 0} 0}\Big) \to_{\xi\to 0} 0, \end{aligned}$$

denn wegen der Linearität von A bleibt $\frac{\|A\xi\|}{\|\xi\|} = \|A(\frac{\xi}{\|\xi\|})\|$ beschränkt. $\square$

Folgerung 69 (Kettenregel in Komponenten). *Seien $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^m$, $F(U) \subset V$ und $G : V \to \mathbb{R}$, $H := G\circ F : U \to \mathbb{R}$. Es sei F in $\mathbf{x}$ und G in $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ differenzierbar. Dann ist $H = G\circ F$ in $\mathbf{x}$ differenzierbar und für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt:*

$$\partial_i H(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k G(\mathbf{y}) \partial_i F_k(\mathbf{x}),$$

d.h.

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G}{\partial y_k}(\mathbf{y})\ \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Beispiele
In den folgenden Beispielen betrachten wir Abbildungen des Vektorraumes der $n\times n$-Matrizen $Mat_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.

(i) Sei $F : Mat_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(A) = \det(A)$. Dann gilt für das Differential in $\mathbf{1}_n$

$$dF_{\mathbf{1}_n}(A) = d\ \mathsf{det}_{\mathbf{1}_n}(A) = spur(A);$$

denn es ist $dF_{\mathbf{1}_n}(A)$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\left[\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)(\delta_{1\sigma(1)} + ta_{1\sigma(1)})\cdot\ldots\cdot(\delta_{n\sigma(n)} + ta_{n\sigma(n)})\right] \\ &= a_{11} + \ldots + a_{nn}. \end{aligned}$$

Beispiele

(ii) Nun sei $F : Mat_n(\mathbb{R}) \to Mat_n(\mathbb{R})$ gegeben durch $F(A) = A^2$ und $G : Mat_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch $G(A) = \mathrm{spur}A$.

F und G sind auf $Mat_n(\mathbb{R})$ differenzierbar mit

$$dF_A B = \frac{d}{dt}|_{t=0}\left[(A+tB)^2\right] = AB + BA,$$

und

$$dG_A B = \frac{d}{dt}|_{t=0}\left[\mathrm{spur}(A+tB)\right] = \mathrm{spur}B,$$

für $A, B \in Mat_n, (\mathbb{R})$.

Somit ist $G\circ F : A \mapsto \mathrm{spur}(A^2)$ differenzierbar und

$$d(G\circ F)_A B = dG_{F(A)} \circ dF_A(B) = \mathrm{spur}(AB + BA) = 2\mathrm{spur}(AB).$$

Beispiel
Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ $(\varepsilon > 0)$ eine differenzierbare Abbildung, d.h. eine *differenzierbare Kurve*; $\mathbf{x} = c(0)$, $v = c'(0) = (c_1'(0), \ldots, c_n'(0))^t$.

(Es genügt hier vorauszusetzen, dass c stetige Abbildung, d.h. eine *stetige Kurve* ist, die im Nullpunkt differenzierbar ist.)

Ferner sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine in einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $\mathbf{x}$ definierte und in $\mathbf{x}$ differenzierbare Funktion.

Dann gilt für die Ableitung der Funktion $f\circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$:

$$(f\circ c)'(0) = df_{c(0)}(c'(0)) = df_{\mathbf{x}}(v) = \partial_v f(\mathbf{x}).$$

D.h.

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(f(c(t))) \;=\; \partial_v f(\mathbf{x}) \;=\; \frac{d}{dt}|_{t=0}(f(\mathbf{x}+tv)).$$

6.4 Mittelwertsatz

Mittelwertsatz

Satz 70 (Mittelwertsatz für Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.*

Seien weiterhin $\mathbf{x} \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$, so dass $\mathbf{x} + t\xi \in U$, für alle $t \in [0,1]$.

Dann existiert ein $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} + t_0\xi \in U$ mit $t_0 \in (0,1)$, so dass

$$F(\mathbf{x} + \xi) - F(\mathbf{x}) = dF_{\mathbf{x}_0}(\xi).$$

Beweis. Der Beweis beruht auf dem MWS für Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
Sei $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \mathbf{x} + t\xi$ und $f = F \circ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$.
Nach dem MWS für f erhalten wir ein $t_0 \in (0,1)$ mit $f(1) - f(0) = f'(t_0)$.
Aus der Kettenregel ergibt sich dann

$$f(1) - f(0) = f'(t_0) \;=\; (F \circ \varphi)'(t_0) \;=\; dF_{\mathbf{x}+t_0\xi}(\varphi'(t_0))$$

Für $\varphi(t) = \mathbf{x} + t\xi$ ist $\varphi' \equiv \xi$ und damit $F(\mathbf{x} + \xi) - F(\mathbf{x}) = dF_{\mathbf{x}_0}(\xi)$. □

Ist eine Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^m$ konstant, so ist $dF_{\mathbf{x}} = 0$ für alle $\mathbf{x} \in U$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht (man betrachte eine disjunkte Vereinigung $U = U_1 \cup U_2$ zweier offener Mengen). Allerdings gilt:

Folgerung 71. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist U wegzusammenhängend, d.h. gibt es für je zwei Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ stets eine stetige Kurve $c : [0,1] \to U$ mit $c(0) = \mathbf{x}$ und $c(1) = \mathbf{y}$, so gilt:*

Ist $F : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $dF_{\mathbf{x}} = 0 \;\forall\; \mathbf{x} \in U$, so ist F konstant.

Beweis. Sei $\mathbf{x} \in U$ und $\varepsilon > 0$ so, dass $K_{\mathbf{x}} := \overline{B_\varepsilon(\mathbf{x})} \subset U$. Nach dem MWS ist F auf $K_{\mathbf{x}}$ konstant, d.h. $F|_{K_{\mathbf{x}}} \equiv d$.

Sei nun $\mathbf{y} \in U$ und c eine stetige Kurve von $\mathbf{x}$ nach $\mathbf{y}$. Deren Bild wird überdeckt durch das Mengensystem $\{B_\varepsilon(c(t))\}_{t\in[0,1]}$.

Da nun $[0,1]$ kompakt ist und c stetig, ist auch $c([0,1])$ kompakt. Daher finden wir eine endliche Teilüberdeckung durch offene Bälle $B_\varepsilon(c(t_i))$ für $i = 1, \dots k$ und $t_1 = 0$, $t_k = 1$. Damit ist aber $F|_{B_\varepsilon(\mathbf{x})} \equiv d \equiv F|_{B_\varepsilon(c(t_i))}$, d.h. $F(\mathbf{y}) = F(c(t_k)) = \dots = F(c(t_1)) = F(\mathbf{x})$. □

6.5 Niveaumengen und lokale Extrema

Niveaumengen und Gradient

Satz 72. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.*

Dann steht $\operatorname{grad} f$ *senkrecht auf den Niveaumengen*

$$N_f(k) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f(\mathbf{x}) = k\},$$

d.h. für jede in $N_f(k)$ verlaufende differenzierbare Kurve $c : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$\operatorname{grad} f|_{c(t)} \perp c'(t) \quad \textit{für alle} \quad t \in (a,b).$$

Beweis. Das folgt durch Ableiten der Gleichung $f \circ c = k$:

$$0 = df_c \circ c' = \langle \operatorname{grad} f, c' \rangle.$$

□

Beispiel
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Norm, $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$. Die Niveaumengen sind dann Kugeln vom Radius k und der Gradient ist $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$.

Bemerkung
Wenn $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \neq 0$ ist, so gibt der Gradient die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f im Punkt $\mathbf{x} \in U$ an, denn für jeden Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt wegen der CS-Ungleichung

$$\partial_v f(\mathbf{x}) = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), v \rangle \leq \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $v = \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{x})}{\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|}$.

Lokale Extrema

Definition 41. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\mathbf{x} \in U$.*

Man sagt, dass f in $\mathbf{x}$ ein lokales Maximum (bzw. ein lokales Minimum) annimmt, falls es $\varepsilon > 0$ gibt, derart dass

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\xi) \quad (bzw. \quad f(\mathbf{x}) \leq f(\xi))$$

für alle $\xi \in U$ mit $\|\mathbf{x} - \xi\| < \varepsilon$.

Lokale Minima und Maxima heißen auch lokale Extrema.

Man spricht von einem isolierten lokalen Extremum, falls zusätzlich $f(\xi) \neq f(\mathbf{x})$ für alle $\xi \in U \setminus \{\mathbf{x}\}$ mit $\|\mathbf{x} - \xi\| < \varepsilon$.

Lokale Extrema und Gradient

Satz 73. *$f : U \to \mathbb{R}$ sei an der Stelle $\mathbf{x} \in U$ partiell differenzierbar ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen).*

Wenn f an der Stelle $\mathbf{x} \in U$ ein lokales Extremum annimmt, dann gilt $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = 0$.

Beweis. Für alle $i = 1, \ldots, n$ ist die Funktion $t \mapsto g(t) := f(\mathbf{x} + te_i)$ im Nullpunkt differenzierbar und hat dort ein lokales Extremum.

Demnach gilt

$$0 = g'(0) = \partial_i f(\mathbf{x}).$$

□

6.6 Taylorentwicklung

Wiederholung: Taylor-Entwicklung für Funktionen einer Variablen
Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(m+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Zu $x \in I$ sei das Polynom $T_m(\xi) := T_m(x, \xi) \in \mathbb{R}[\xi]$ gegeben durch

$$T_m(x,\xi) = f(x) + f'(x)\xi + \frac{1}{2}f''(x)\xi^2 + \cdots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(x)\xi^m.$$

Dann gibt es zu jedem ξ mit $\{x + t\xi | t \in [0,1]\} \subset I$ ein $\tau \in [0,1]$ mit

$$f(x+\xi) = T_m(x,\xi) + \frac{f^{(m+1)}(x+\tau\xi)}{(m+1)!}\xi^{m+1}.$$

Notation: Multi-Indizes
Um die Taylorentwicklung für Funktionen von mehreren Veränderlichen kompakt schreiben zu können, führen wir die folgenden Abkürzungen ein.

Für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\begin{aligned}
\alpha &:= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\
|\alpha| &:= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \\
\alpha! &:= \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n! \\
\mathbf{x}^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \\
\partial^\alpha &:= \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n}
\end{aligned}$$

Definition 42. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Es bezeichne*

$$C^k(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig partiell diff.bar } \}$$

den Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $U \to \mathbb{R}$.

Taylorentwicklung für Funktionen von n Variablen

Satz 74 (Taylorentwicklung)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{m+1}(U)$, $\mathbf{x} \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$, so dass $\{\mathbf{x} + t\xi | t \in [0,1]\} \subset U$.*

Dann existiert $\tau \in [0,1]$, so dass

$$f(\mathbf{x}+\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(\mathbf{x})\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(\mathbf{x}+\tau\xi)\xi^\alpha.$$

Definition 43. $T_m(\xi) := \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(\mathbf{x})\xi^\alpha$ *ist ein Polynom vom (Gesamt-)Grad m in den Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und heißt m-tes Taylorpolynom.*

Mit Hilfe des folgenden Hilfssatzes führen wir den Satz auf den Fall $n = 1$ zurück.

Lemma 75. *Für die $(m+1)$-mal stetig differenzierbaren Funktionen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(\mathbf{x} + t\xi)$, gilt (für alle $0 \le k \le m+1$):*

$$g^{(k)}(t) = k! \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\mathbf{x} + t\xi)\xi^\alpha.$$

Beweis des Satzes: Der Satz folgt nun mit Hilfe des Lemmas aus der Taylorentwicklung von g im Nullpunkt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}+\xi) \;=\; g(1) \;&=\; \sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \cdot 1^k + \frac{g^{(m+1)}(\tau)}{(m+1)!} \cdot 1^{m+1} \\ &=\; \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\mathbf{x})\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\mathbf{x}+\tau\xi)\xi^\alpha. \end{aligned}$$

□

Beweis des Lemmas: Wir beweisen das Lemma durch Induktion nach k.
Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Wir berechnen $g^{(k+1)}(t)$ aus

$$g^{(k)}(t) = k! \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\mathbf{x} + t\xi)\xi^\alpha.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir:

$$\frac{d}{dt} \partial^\alpha f(\mathbf{x} + t\xi) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \partial^\alpha f(\mathbf{x} + t\xi)\xi_i$$

und somit

$$g^{(k+1)}(t) = k! \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial_i \partial^\alpha f(\mathbf{x} + t\xi)\xi^\alpha \xi_i.$$

Weiter im Beweis: Daraus ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} g^{(k+1)}(t) \;&=\; k! \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial_i \partial^\alpha f(\mathbf{x} + t\xi)\xi^\alpha \xi_i \\ &=\; k! \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\beta|=k+1} \frac{\beta_i}{\beta!} \partial^\beta f(\mathbf{x} + t\xi)\xi^\beta \\ &=\; (k+1)! \sum_{|\beta|=k+1} \frac{1}{\beta!} \partial^\beta f(\mathbf{x} + t\xi)\xi^\beta, \end{aligned}$$

denn $\sum_{i=1}^n \beta_i = |\beta| = k+1$, $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_i + 1, \dots, \alpha_n)$. □

Damit haben wir das Lemma und somit auch den Satz bewiesen.

Approximation durch das Taylorpolynom

Folgerung 76. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine m-mal stetig differenzierbare Funktion und $\mathbf{x} \in U$.*

Dann existiert $\delta > 0$ und $\varphi : B_\delta(\mathbf{x}) \to \mathbb{R}$, so dass $B_\delta(\mathbf{x}) \subset U$ und

$$f(\mathbf{x} + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\mathbf{x}) \xi^\alpha + \varphi(\xi)$$

für alle $\xi \in B_\delta(0)$, wobei

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^m} = 0.$$

Beweis (der Folgerung).

Da U offen ist, existiert $B_\delta(\mathbf{x}) \subset U$. Aus der Taylorentwicklung der Ordnung $m-1$ folgt für $\xi \in B_\delta(0)$:

$$f(\mathbf{x} + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m-1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\mathbf{x}) \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\mathbf{x} + \tau\xi) \xi^\alpha,$$

mit $\tau \in [0, 1]$.

Wir setzen

$$\varphi(\xi) := \sum_{|\alpha| = m} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha f(\mathbf{x} + \tau\xi) - \partial^\alpha f(\mathbf{x})) \xi^\alpha.$$

Dann gilt $f(\mathbf{x} + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\mathbf{x}) \xi^\alpha + \varphi(\xi)$ und

$$\lim_{\xi \to 0} \varphi(\xi) / \|\xi\|^m = 0,$$

denn die m-ten partiellen Ableitungen von f sind stetig. □

Beispiel

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\mathbf{x}, \xi \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $\{\mathbf{x} + t\xi | t \in [0, 1]\} \subset U$.

Dann gilt

$$f(\mathbf{x} + \xi) = \underbrace{f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(\mathbf{x}) \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(\mathbf{x}) \xi_i \xi_j}_{quadratisches\ Taylorpolynom} + \varphi(\xi),$$

wobei $\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} = 0$.

6.7 Hessematrix und lokale Extrema

Hessematrix

Definition 44. *Die symmetrische Matrix*

$$\operatorname{Hess} f(\mathbf{x}) := (\partial_i \partial_j f(\mathbf{x}))_{i,j=1,\dots,n}$$

heißt Hessematrix von f im Punkt $\mathbf{x}$.

Nachtrag zum letzen Beispiel:
Mit der Hessematrix lässt sich die obige Gleichung nun indexfrei schreiben:

$$f(\mathbf{x}+\xi) = f(\mathbf{x}) + \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \xi\rangle + \frac{1}{2}\langle \operatorname{Hess} f(\mathbf{x})\xi, \xi\rangle + \varphi(\xi).$$

Definition 45. *(i) Eine symmetrische Bilinearform β auf einem reellen VR heißt positiv semi-definit, wenn*

$$\beta(v,v) \geq 0 \quad \textit{für alle} \quad v \in V.$$

(ii) β heißt negativ definit (bzw. negativ semi-definit), wenn $-\beta$ positiv definit (bzw. positiv semi-definit) ist.

(iii) β heißt indefinit, wenn β weder positiv noch negativ semi-definit ist.

(iv) Ein symmetrischer Endomorphismus A eines Euklidischen VR heißt positiv definit (bzw. positiv semi-definit, indefinit etc.), wenn die zugehörige symmetrische Bilinearform

$$\beta(v,w) = \langle v, Aw\rangle, \quad v,w \in V,$$

positiv definit (bzw. positiv semi-definit, indefinit etc.) ist.

Hessematrix und lokale Extrema

Satz 77. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.*

(i) Wenn f an der Stelle $\mathbf{x} \in U$ ein lokales Minimum (bzw. Maximum) hat, dann ist $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = 0$ und $\operatorname{Hess} f(\mathbf{x})$ ist positiv (bzw. negativ) semi-definit.

(ii) Wenn der Gradient von f an der Stelle $\mathbf{x} \in U$ verschwindet und ist

$\operatorname{Hess} f(\mathbf{x})$ *positiv definit, dann hat f in $\mathbf{x}$ ein isoliertes lokales Minimum,*

$\operatorname{Hess} f(\mathbf{x})$ *negativ definit, dann hat f in $\mathbf{x}$ ein isoliertes lokales Maximum,*

$\operatorname{Hess} f(\mathbf{x})$ *indefinit, dann hat f in $\mathbf{x}$ kein lokales Extremum.*

Beweis.

(i) f habe in $\mathbf{x}$ z.B. ein lokales Minimum. Wir wissen bereits, dass $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = 0$ und mit $h(\xi) := \frac{1}{2}\langle \operatorname{Hess} f(\mathbf{x})\xi, \xi\rangle$ gilt

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x} + \xi) = f(\mathbf{x}) + h(\xi) + \varphi(\xi).$$

Daraus folgt $0 \leq h(\xi) + \varphi(\xi)$, d.h. $h(\xi) \geq -\varphi(\xi)$ und somit mit $t \in \mathbb{R}^*$:

$$h\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right) = \frac{h(\xi)}{\|\xi\|^2} = \frac{h(t\xi)}{\|t\xi\|^2} \geq -\frac{\varphi(t\xi)}{\|t\xi\|^2} \stackrel{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Das impliziert $h(y) \geq 0$ für alle Einheitsvektoren y, d.h. $h \geq 0$.

(ii) Sei nun umgekehrt $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = 0$ und $h(\xi) > 0$ für alle $\xi \neq 0$.

Dann ist $m = \min_{\|y\|=1} h(y) > 0$.

Weiterhin findet man zu $0 < \varepsilon < m$ ein $\delta > 0$, so dass $|\varphi(\xi)| < \varepsilon\|\xi\|^2$ für alle $0 \neq \xi \in B_\delta(0)$.

Aus der Taylorentwicklung folgt dann $f(\mathbf{x}+\xi) = f(\mathbf{x}) + h(\xi) + \varphi(\xi) > f(\mathbf{x}) + m\|\xi\|^2 - \varepsilon\|\xi\|^2 > f(\mathbf{x})$.

□

7 Der Umkehrsatz und seine Anwendungen

7.1 Umkehrsatz

Umkehrsatz

Definition 46 (Diffeomorphismen)**.** *Seien U und V offene Mengen im $\mathbb{R}^n$. Eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung $f : U \to V$, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist, heißt Diffeomorphismus zwischen U und V.*

Satz 78. *Sei $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Dann ist für alle $x \in U$ die Ableitung df_x invertierbar und es gilt*

$$(df^{-1})_{f(x)} \;=\; (df_x)^{-1}.$$

Beweis. Dies folgt aus der Kettenregel:

$$Id_{\mathbb{R}^n} \;=\; d\,Id_x \;=\; d\left(f^{-1} \circ f\right)_x \;=\; df^{-1}_{f(x)} \circ df_x$$

und damit $df^{-1}_{f(x)} = (df_x)^{-1}$. □

Umkehrsatz

Der Umkehrsatz besagt, dass lokal, d.h. in einer Umgebung von x, eine Umkehrabbildung existiert, falls df_x invertierbar ist.

Satz 79 (Umkehrsatz)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $p \in U$ so, dass die Ableitungsmatrix df_p invertierbar ist. Dann existieren offene Umgebungen $V \subset U$ von p und W von $q := f(p)$, so dass $f|_V : V \to W$ ein Diffeomorphismus ist.*

Beispiele

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ mit $f'(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann: $x > 0 \Longrightarrow W = \mathbb{R}_+$, $V = \mathbb{R}_+$ und $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, und $x < 0 \Longrightarrow W = \mathbb{R}_+$, $V = \mathbb{R}_-$ und $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ besitzt eine stetige Umkehrabbildung (da streng monoton wachsend). Diese ist aber nicht differenzierbar in $y = 0 = f(0)$ da $f'(0) = 0$.

Der Beweis des Umkehrsatzes beruht auf dem Banachschen Fixpunktsatz und den folgenden beiden Sätzen.

Satz 80 (Schrankensatz)**.** *Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Sei $K \subset U$ eine kompakte Menge, die konvex ist, d.h. für alle $x, y \in K$ liegt auch die Strecke $\{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$ in K. Dann ist f auf K Lipschitzstetig, d.h. es existiert eine Zahl $L \geq 0$, die Lipschitzkonstante, so dass*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

für alle $x, y \in K$. Dabei ist L gegeben durch $L = \max_{x \in K} \|df_x\|_{Operatornorm}$.

Beweis. Da K kompakt ist und $x \mapsto df_x$ stetig, existiert

$$L = \max_{x \in K} \|df_x\|_{Op.-norm} = \max_{x \in K} \max_{\xi \in \mathbb{R}^n, \|\xi\|=1} \|df_x(\xi)\|$$

Nach dem MWS existiert dann für $x, y \in K$ ein $t_0 \in [0,1]$, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| = \|df_{t_0 x + (1-t_0)y}(y - x)\| \leq L\|y - x\|. \qquad \square$$

Satz 81 (Diffeomorphie)**.** *Seien U und V offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to V$ stetig differenzierbar und bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$. Wenn für jedes $x \in U$ das Differential df_x invertierbar ist, so ist f ein Diffeomorphismus, d.h. f^{-1} ist auch stetig differenzierbar und $df^{-1}_{f(x)} = (df_x)^{-1}$.*

Wir erinnern uns:
$f(x) = x^3$ hat eine stetige aber in $x = 0$ nicht stetig differenzierbare Umkehrabbildung.

Beweis. Wir zeigen die stetige Differenzierbarkeit von f^{-1} in $y = f(x)$.

O.B.d.A. können wir annehmen, dass $x = y = 0$ und $df_x = \mathrm{Id}$, denn:

Sind $L_1, L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbare lineare Abbildungen, so gilt der Satz für f genau dann, wenn er für $L_1 \circ f \circ L_2$ gilt.

Mittels einer Translation verschiebt man dann x und y nach 0, und mittels $L := (df_x)^{-1}$ erhält man nach der Kettenregel

$$d(L \circ f)_x = dL_{f(x)} \circ df_x = L \circ df_x = \mathrm{Id}.$$

Weiter im Beweis des Satzes: Sei $y \in V$ und $x := f^{-1}(y) \in U$. Wieder definieren wir

$$\begin{aligned}\varphi(x) &:= f(x) - f(0) - df_0(x) = f(x) - x \\ \psi(y) &:= f^{-1}(y) - y = x - f(x) = -\varphi(x) = -\varphi(f^{-1}(y)).\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, dass $\frac{\psi(y)}{\|y\|} \to_{y\to 0} 0$.

Da f stetig differenzierbar ist, gilt $\frac{\varphi(x)}{\|x\|} \to_{x\to 0} 0$.

D.h. wir finden ein $\varepsilon > 0$, so dass $\frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{2}$ für alle $\|x\| < \varepsilon$.

Da f^{-1} stetig ist, finden wir zu diesem ε ein $\delta > 0$, so dass $\|f^{-1}(y)\| \leq \varepsilon$ für alle $\|y\| < \delta$. Somit gilt für alle y mit $\|y\| < \delta$, dass

$$\|\psi(y)\| = \|\varphi(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\| = \frac{1}{2}\|f^{-1}(y)\|, \qquad (*)$$

und daher wegen der Dreiecksungleichung

$$\|f^{-1}(y)\| \leq \|f^{-1}(y) - y\| + \|y\| = \|\psi(y)\| + \|y\| \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{2}\|f^{-1}(y)\| + \|y\|.$$

Ende des Beweises: Also haben wir für alle y mit $\|y\| < \delta$, dass

$$\|f^{-1}(y)\| \leq 2\|y\|$$

und somit

$$\frac{\|\psi(y)\|}{\|y\|} = \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}\frac{\|x\|}{\|y\|} = \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}\frac{\|f^{-1}(y)\|}{\|y\|} \leq 2 \cdot \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}.$$

Aus $y \to 0$ folgt nun, wegen der Stetigkeit von f^{-1}, dass auch $x = f^{-1}(y) \to 0$ und somit

$$\frac{\|\psi(y)\|}{\|y\|} \leq 2 \cdot \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \to_{y\to 0} 0.$$

Damit ist f^{-1} differenzierbar in y und mit $df_y^{-1} = (df_x)^{-1}$ erhalten wir auch die Stetigkeit von df^{-1}. $\square$

Jetzt beweisen wir den Umkehrsatz:

Satz 82 (Umkehrsatz)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $p \in U$ so, dass die Ableitungsmatrix df_p invertierbar ist. Dann existieren offene Umgebungen $V \subset U$ von p und W von $q := f(p)$, so dass $f|_V : V \to W$ ein Diffeomorphismus ist,*

d.h. $f|_V$ ist bijektiv und $(f|_V)^{-1} : W \to V$ stetig differenzierbar.

Beweis. Wir können wieder o.B.d.A. annehmen, dass $p = q = 0$ und $df_p = \mathrm{Id}$. Der Beweis des Umkehrsatzes erfolgt nun in mehreren Schritten:

1) Definition von W: Sei $\delta > 0$, so dass $\overline{B_{2\delta}(0)} \subset U$ und so, dass

$$\|Id - df_x\|_{Op.-Norm} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } x \in \overline{B_{2\delta}(0)}. \qquad (*)$$

Wir setzen dann $W := B_\delta(0)$.

2) Definition von V:
$$V := f^{-1}(W) \cap B_{2\delta}(0).$$
Da W offen ist und f stetig, ist auch das Urbild $f^{-1}(W)$ offen.Damit ist V als Durchschnitt zweier offener Mengen offen.

Weiter im Beweis: 3) $f|_V : V \to W$ ist bijektiv:
Zu $y \in W = B_\delta(0)$ definieren wir die differenzierbare Abbildung

$$\varphi_y : U \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi_y(x) := y + x - f(x).$$

Ein Fixpunkt x von φ_y ist eine Lösung von $f(x) = y$. Wegen $(d\varphi_y)_x = Id - df_x$ liefert der Schrankensatz auf $\overline{B_{2\delta}(0)} \subset U$ dass

$$\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|. \qquad (**)$$

Da $\|y\| < \delta$ gilt für alle $x \in \overline{B_{2\delta}(0)}$, dass

$$\|\varphi_y(x)\| \leq \|\varphi_y(x) - \varphi_y(0)\| + \|y\| < 2\delta,$$

D.h. $\varphi_y : \overline{B_{2\delta}(0)} \to B_{2\delta}(0)$. Wegen $(**)$ ist φ_y also eine kontrahierende Abbildung auf dem vollständigen metrischen Raum $\overline{B_{2\delta}(0)}$.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz finden wir also zu jedem $y \in W = B_\delta(0)$ genau ein $x \in \overline{B_{2\delta}(0)}$ mit $\varphi_y(x) = x$.

Wegen $\|x\| = \|\varphi_y(x)\| < 2\delta$, gilt sogar $x \in B_{2\delta}(0)$. D.h aber, dass $f(x) = y$ und $x \in f^{-1}(W) \cap B_{2\delta}(0) = V$. Somit ist $f : V \to W$ bijektiv und wir können die Umkehrabbildung mittels $f^{-1}(y) := x$ definieren.

Weiter im Beweis:

4) f^{-1} ist stetig:
Wegen (**) und der Dreiecksungleichung erhalten wir für $x_1, x_2 \in V$

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| &= \|\varphi_0(x_2) - \varphi_0(x_1)\| + \|f(x_2) - f(x_1)\| \\ &\overset{(**)}{\leq} \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\| + \|f(x_2) - f(x_1)\|. \end{aligned}$$

Damit ist für $x_1 = f^{-1}(y_1)$ und $x_2 = f^{-1}(y_2)$

$$\|f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)\| \leq 2\|y_2 - y_1\|,$$

und somit ist f^{-1} stetig.

5) Für alle $x \in V$ ist df_x ein Isomorphismus:
Für $x \in V \subset B_{2\delta}(0)$ und der Wahl von δ in (*) gilt für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\|(Id - df_x)(\xi)\| \leq \frac{1}{2}\|\xi\|.$$

Für $\xi \in Ker(df_x)$ ist dann $\|\xi\| \leq \frac{1}{2}\|\xi\|$, d.h. $\xi = 0$. Also ist df_x invertierbar.

Aus dem vorherigen Satz folgt somit die Behauptung des Umkehrsatzes. □

Bemerkung:
f^{-1} ist sogar k-mal stetig differenzierbar, wenn f k-mal stetig differenzierbar ist ($k \in \mathbb{N}$). Die Gleichung $df_y^{-1} = (df_{g(y)})^{-1}$ zeigt nämlich, dass f^{-1} k-mal stetig differenzierbar ist, wenn f k-mal und $g = f^{-1}$ $(k-1)$-mal stetig differenzierbar ist.

Folgerung 83 (Offenheits-/Diffeomorphiesatz)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit df_x invertierbar für alle $x \in U$. Dann gilt*

- *$f(U) \subset \mathbb{R}^n$ ist offen.*
- *Ist f injektiv, so ist f ein Diffeomorphismus $U \to f(U)$.*

Beweis. Dies folgt aus dem Umkehrsatz und dem Satz über Diffeomorphie bei stetiger Umkehrabbildung. (ÜA) □

Beispiel (ebene Polarkoordinaten)
Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix},$$

ist unendlich oft differenzierbar. Ihr Differential ist

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Da $\det df = r$, gibt es zu jedem Punkt $p = (r_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, so dass f U bijektiv auf eine offene Menge $V = f(U) \subset \mathbb{R}^2$ abbildet mit unendlich oft differenzierbarer Umkehrabbildung $(f|_U)^{-1} : V \to U$.

Z.B. $U = \mathbb{R}_+ \times (\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi)$.

7.2 Satz über implizite Funktionen

Satz über implizite Funktionen

Motivation
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir betrachten die Gleichung [1mm] $f(x_1,$
bzw. die Lösungsmenge $N_f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$.

- Ist f linear, so ist die Lösungsmenge $N_f(0)$ ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum. Eine Variable, z.B. x_n, ist durch die anderen durch eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ bestimmt (wir können nach x_n auflösen): $f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \iff x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ mit g linear.
- Was passiert, wenn f nicht linear ist? Unter welchen Bedingungen kann man nun die Gleichung nach einer Koordinate auflösen, d.h. wann existiert eine Funktion $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, so dass

  $$f(x_1, \ldots x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0,$$

  d.h. $N_f(0) = graph(g)$? Ist g differenzierbar, falls f differenzierbar ist?

Beispiele

- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 + y^2 - 1$. Es ist $N_f(0) = S^1$ der Kreis. Hier benötigen wir zwei Funktionen, um $N_f(0)$ als Graphen darzustellen:

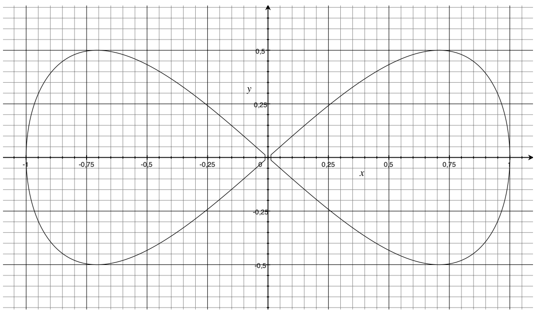
$$\begin{array}{rcccc} S^1 & = & \{(x,y) \in S^1 \mid y \geq 0\} & \cup & \{(x,y) \in S^1 \mid y \leq 0\} \\ & & graph(g_+) & \cup & graph(g_-) \end{array}$$

  mit $g_\pm : [-1,1] \to \mathbb{R}_\pm$, $g_\pm(x) := \pm\sqrt{1-x^2}$. $g_\pm$ sind differenzierbar nur auf dem offenen Intervall $(-1,1)$.

- $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, d.h. $N_f = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Hier gibt es kein g mit $graph(g) = N_f$.

Beispiele

- $f(x,y) := x - y^3$. Hier ist $g(x) = \sqrt[3]{x}$ nicht differenzierbar in 0.
- $f(x,y) = y^2 - x^2(1-x^2)$. $N_f(0) \setminus \{(-1,0),(0,0),(1,0)\}$ ist Vereinigung von Graphen von 4 stetig differenzierbaren Funktionen.

$N_f(0) =$ 

Satz über implizite Funktionen

Satz 84 (Satz über implizite Funktionen)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ k-mal stetig differenzierbar ($k \geq 1$) und $(p,q) \in U$, so dass $f(p,q) = 0$. Weiterhin sei das Differential der Abbildung $y \to f(p,y)$ im Punkt $y = q$ invertierbar.*

Dann gibt es offene Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^m$ von p und $W \subset \mathbb{R}^n$ von q und eine k-mal stetig differenzierbare Abbildung $g : V \to W$ so dass für alle $(x,y) \in V \times W$ gilt: $f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$.

D.h. $N_f(0) \cap V \times W = graph(g)$.

Beweis. Wir betrachten $F : U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $F(x,y) := (x, f(x,y))$.

Das Differential von F an (p,q) berechnet sich wie folgt aus dem Differential der Abbildung $y \mapsto f(x,y) = \sum_{i=1}^n f_i(x,y)e_i$:

$$dF = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m & 0 \\ * & \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j}(p,q) \end{pmatrix}$$

Weiter im Beweis: Da $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j}$ im Punkt (p,q) invertierbar ist, ist auch $dF_{(p,q)}$ im Punkt (p,q) invertierbar.

Nach dem Umkehrsatz gibt es offene Umgebungen $V_1 \subset \mathbb{R}^m$ von p und $V_2 \subset \mathbb{R}^n$ von q, so dass $V_1 \times V_2 \subset U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ durch F bijektiv auf eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ von $F(p,q) = (p, f(p,q)) = (p,0)$ abgebildet wird, und zwar so, dass die Umkehrabbildung

$$G = (G_1, G_2) : \Omega \to V_1 \times V_2$$

k-mal stetig differenzierbar ist.

Dann ist $V := \{x \in V_1 | (x,0) \in \Omega\}$ eine offene Umgebung $V \subset V_1$ von p. Wir setzen dann $W := V_2$ und

$$g : V \to W, \quad g(x) := G_2(x,0).$$

Da G k-mal stetig differenzierbar ist, ist es auch g.

Weiter im Beweis: Aus

$$\Omega \ni (x,y) = F(G(x,y)) = (G_1(x,y), f(G_1(x,y), G_2(x,y))) \qquad (*)$$

folgt dann $G_1(x,y) = x$ und $f(x, G_2(x,y)) = y$.

Wir überprüfen nun die Äquivalenz $f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$ für alle $(x,y) \in V \times W$:

($\Leftarrow$) Da $g(x) = G_2(x,0)$ folgt aus (*), dass $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in V$.

($\Rightarrow$) Umgekehrt folgt aus $(x,y) \in V \times W$ mit $f(x,y) = 0$, dass $F(x,y) = (x, f(x,y)) = (x,0)$und somit

$$(x,y) = G(F(x,y)) = G(x,0) = (G_1(x,0), G_2(x,0)) = (x, g(x)),$$

d.h. $y = g(x)$.

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Beispiel (zweischaliges Hyperboloid)
Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

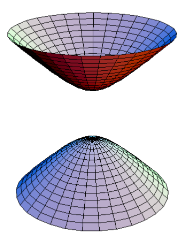
$$f(x,y,z) := x^2 + y^2 - z^2 + 1,$$

erfüllt $\frac{\partial f}{\partial z} = -2z \neq 0$ für alle $(x,y,z) \in H := f^{-1}(0)$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen definiert die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ also lokal eine unendlich oft differenzierbare Funktion $(x,y) \mapsto z = g(x,y)$. Diese kann man durch Auflösen der Gleichung $f(x,y,z) = 0$ nach z berechnen:

$$g_{\pm}(x,y) = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$$

Der Graph von $g_+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, bzw. $g_- : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_-$ ist die obere, bzw. untere, Schale des Hyperboloids H.



Bemerkung
Unter den Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen lässt sich das Differential der durch die Gleichung $f(x,y) = 0$ implizit definierten Abbildung $x \mapsto g(x)$ wie folgt berechnen.

Bezeichnet $d_x f$ das Differential der Abbildung $x \to f(x,y)$ und $d_y f$ das Differential der Abbildung $y \to f(x,y)$, dann liefert Ableiten der Gleichung $f(x,g(x)) = 0$ nach der Kettenregel:

$$0 = d_x f + d_y f dg \Longrightarrow dg = -(d_y f)^{-1} d_x f.$$

Hierbei ist dg an der Stelle x und $d_x f, d_y f$ an der Stelle $(x, g(x))$ auszuwerten:

$$dg|_x = -\left(d_y f|_{(x,g(x))}\right)^{-1} d_x f|_{(x,g(x))}.$$

In Komponenten, $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, g(x)) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x) \;=\; 0.$$

7.3 Abbildungen von konstantem Rang

Abbildungen von konstantem Rang

Definition 47 (Rang einer differenzierbaren Abbildung)**.** *$U \subset \mathbb{R}^m$ sei offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar.*

(i) Der Rang von f im Punkt $p \in U$ ist definiert als

$$\operatorname{rg}(f)_p := \operatorname{rg} df_p \leq \min\{m, n\}.$$

Das definiert eine Funktion $\operatorname{rg}(f) : U \to \{0, 1, 2, \ldots, \min\{m, n\}\}$.

(ii) f heißt Immersion, wenn $\operatorname{rg}(f) \equiv m$.

(iii) f heißt Submersion, wenn $\operatorname{rg}(f) \equiv n$.

(iv) k-mal stetig differenzierbare Abbildungen heißen auch von der Klasse C^k oder C^k-Abbildungen, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(v) $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ seien offen. Eine C^k-Abbildung $f : U \to V$ heißt C^k-Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist und f^{-1} von der Klasse C^k ist.

Beispiele

(i) Sei $m \leq n$.

$$\mathbb{R}^m \ni (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n$$

ist eine Immersion. Diese nennt man auch kanonische Immersion ι.

(ii) Sei $m \geq n$.

$$\mathbb{R}^m \ni (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

ist eine Submersion. Das ist die kanonische Submersion (Projektion) π.

(iii) Sei $r \leq \min\{m, n\}$.

$$\mathbb{R}^m \ni (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} = \mathbb{R}^n$$

hat konstanten Rang r.

Beispiele

(iv) Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $F(x) = (x, f(x))$ eine Immersion, denn $rg(dF_x) \equiv n$. Das Bild von F ist der Graph von f.

(v) Der Rang eines Diffeomorphismus $f : U \to V$ ($U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen) ist konstant gleich $m = n$.

Durch Ableiten der Gleichungen $f^{-1} \circ f = Id_U$ und $f \circ f^{-1} = Id_V$ folgt nämlich, dass df_p für alle $p \in U$ invertierbar ist, d.h. $m = n = rg(f)$.

Umgekehrt besagt der Umkehrsatz, dass jede C^k-Abbildung $f : U \to V$ vom Rang n zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ lokal ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Immersionen

Satz 85 (Immersionen). *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $p \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung mit $\mathrm{rg}(f)_p = m \leq n$.*

Dann existiert eine offene Umgebung V von $f(p)$ und ein C^k-Diffeomorphismus $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$(\varphi \circ f)(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

in einer Umgebung von p.

Schematisch sieht die Situation bei einer Immersion so aus

$$\begin{tikzcd} & V \subset \mathbb{R}^n \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{R}^m \supset U \arrow[ur, "f"] \arrow[r, hook, "\iota"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"', shift right=3] & \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

wobei $\varphi \circ f = \iota$. Dies ist durch das Symbol $\circlearrowright$ angedeutet. Man spricht auch von einem *kommutativen Diagramm.*

Beweis. Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten im $\mathbb{R}^n$ können wir annehmen, dass die ersten m Zeilen der $(n \times m)$-Matrix df_p linear unabhängig sind.

Betrachte $F : U \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$, $F(x, y) = f(x) + (0, y)$.

F ist von der Klasse C^k und

$$dF_{(p,y)} = \left(\begin{array}{c|c} df_p & \begin{matrix} 0 \\ 1_{n-m} \end{matrix} \end{array} \right) \in Mat_n(\mathbb{R}).$$

Da insbesondere $dF_{(p,0)}$ invertierbar ist, existiert nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung W von $(p,0) \in \mathbb{R}^n$, so dass $F|_W : W \to F(W)$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung $V = F(W)$ von $F(p,0) = f(p)$ ist.

Der Diffeomorphismus $\varphi := (F|_W)^{-1} : V \to W$ erfüllt dann, wie gewünscht, $(x,0) = \varphi(F(x,0)) = \varphi(f(x))$. $\square$

Submersionen

Satz 86 (Submersionen)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $p \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung mit $\mathrm{rg}(f)_p = n \leq m$.*

Dann existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von p und ein C^k-Diffeomorphismus $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^m$, so dass

$$(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$$

auf $\varphi(V)$.

Hier bekommen wir folgendes Bild:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m \supset U \supset V & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(V) \subset \mathbb{R}^m \\ & {\scriptstyle f} \searrow^{\circlearrowleft} & \downarrow {\scriptstyle \pi} \\ & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

wobei $f \circ \varphi^{-1} = \pi$.

Beweis. Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten im $\mathbb{R}^m$ können wir annehmen, dass die ersten n Spalten der $(n \times m)$-Matrix df_p linear unabhängig sind.

Betrachte $F : U \to \mathbb{R}^m$, $F(x', x'') = (f(x', x''), x'')$, wobei $(x', x'') \in U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $x' = (x_1, \ldots, x_n)$, $x'' = (x_{n+1}, \ldots, x_m)$.

F ist von der Klasse C^k und

$$dF_p = \left(\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{df_p} \\ \hline 0 & 1_{m-n} \end{array} \right).$$

Da dF_p invertierbar ist, existiert nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung $V \subset U$ von $p \in \mathbb{R}^m$, so dass $\varphi := F|_V : V \to F(V)$ ein Diffeomorphismus ist.

φ erfüllt dann für alle $(x', x'') \in \varphi(V)$: $(x', x'') = F(\varphi^{-1}(x', x''))$ und somit, wie gewünscht, $f(\varphi^{-1}(x', x'')) = x'$. $\square$

Allgemeine Abbildungen von konstantem Rang

Satz 87 (Allgemeine Abbildungen von konstantem Rang). *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $p \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung mit $\operatorname{rg}(f) = r$ auf U.*

Dann existieren offene Umgebungen $V \subset U$ von p und $W \subset \mathbb{R}^n$ von $f(p)$ und C^k-Diffeomorphismen $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^m$, $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

auf $\varphi(V)$.

Beweis. Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten im $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ können wir annehmen, dass die Matrix

$$A = \left(\frac{\partial f_i(p)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,r} \qquad \text{invertierbar ist.}$$

Weiter im Beweis:

Betrachte $F(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x), x_{r+1}, \dots, x_m)$.

Da

$$dF_p = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & \mathbf{1}_{m-r} \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von p, so dass $\varphi := F|_V : V \to \varphi(V)$ ein Diffeomorphismus ist.

Aus $F \circ \varphi^{-1}(x) = x$ folgt dann $f_i(\varphi^{-1}(x)) = x_i$ für alle $i \leq r$ und $x \in \varphi(V)$.

Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass $f_i(x) = x_i$ für alle $i \leq r$.

Somit ist

$$df_p = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ * & B \end{pmatrix}, \quad B = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j \geq r+1}.$$

und aus $\operatorname{rg}(f) = r$ folgt nun $B = 0$, d.h. f hängt nur von $(x_1, \dots, x_r)$ ab.

Weiter im Beweis:

Wir haben gezeigt, dass f von der Form $f(x) = (x', f''(x'))$ ist, wobei

$$x' = (x_1, \dots, x_r) \quad \text{und} \quad f'' = (f_{r+1}, \dots, f_n).$$

Sei nun $U' \subset \mathbb{R}^r$ die Projektion von $U \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$.

$W := U' \times \mathbb{R}^{n-r}$ ist eine offene Umgebung von $f(p) = (p', f''(p'))$, wobei $p' \in \mathbb{R}^r$ die Projektion von $p = (p', p'') \in U \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ ist.

Es genügt nun, folgenden Diffeomorphismus $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^n$ zu verwenden:

$$\psi(x) = (x', x'' - f''(x')), \quad x = (x', x'') \in W = U' \times \mathbb{R}^{n-r}.$$

In der Tat gilt, wie gewünscht, $\psi(f(x)) = \psi(x', f''(x')) = (x', f''(x') - f''(x')) = (x', 0)$. □

Beispiel

Die Abbildung $f : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, $A \mapsto f(A) = A^t A$, hat auf der offenen Teilmenge $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ konstanten Rang $r = \frac{n(n+1)}{2}$, wie im Folgenden gezeigt wird.

Wir können f als Abbildung $f : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ in den Unterraum $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ der symmetrischen Matrizen auffassen.

Das Differential $df_A : B \mapsto B^t A + A^t B$, $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$, ist für $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ surjektiv:

Sei $C \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$. df_A bildet $B = \frac{1}{2}(A^{-1})^t C$ auf $\frac{1}{2}(C^t + C) = C$ ab.

Daraus folgt $\mathrm{rg}(f)_A = \dim \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Somit definiert f eine Submersion $GL(n, \mathbb{R}) \to Sym(n, \mathbb{R})$.

7.4 Untermannigfaltigkeiten im Euklidischen Raum

Untermannigfaltigkeiten im Euklidischen Raum

Wir wollen nun Teilmengen des Euklidischen Raumes betrachten, die lokal durch eine Immersion oder eine Submersion gegeben sind.

Bemerkung: Die auf Teilmengen induzierte Metrik

Sei $Y \subset (X, d)$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d).

Dann definiert die Einschränkung von d auf Y eine Metrik d_Y auf Y, so dass (Y, d_y) ein metrischer Raum ist. d_Y heißt *induzierte Metrik.*

Beispiel

Die zweidimensionale Einheitssphäre $S^2 = S_1(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge im Euklidischen Raum und bezüglich der induzierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum.

Die obere Halbsphäre $\{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$ ist eine offene Teilmenge der Sphäre S^2 und nicht vollständig.

Definition 48. *Eine bijektive stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen X und Y heißt Homöomorphismus, wenn $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist*

Beispiel

Die Abbildung

$$f : [0, 2\pi) \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}, \quad f(\varphi) = e^{i\varphi},$$

ist stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus. Denn $z_n = f(2\pi - \frac{1}{n}) \in S^1$ konvergergiert gegen 1 aber $f^{-1}(z_n) = 2\pi - \frac{1}{n} \in [0, 2\pi)$ konvergiert nicht gegen $f^{-1}(1) = 0$.

Die Einschränkung von f auf das offene Intervall $(0, 2\pi)$ definiert jedoch einen Homöomorphismus von $(0, 2\pi)$ auf die offene Teilmenge $S^1 \backslash \{1\}$ der Einheitskreislinie S^1.

Untermannigfaltigkeiten

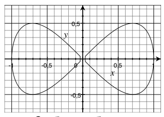
Definition 49 (Untermannigfaltigkeiten)**.** *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^m$ und eine C^k-Immersion $F : U \to \mathbb{R}^n$ gibt, die U homöomorph auf $F(U) = V \cap M$ abbildet.*

F heißt lokale Parametrisierung von M.

Zweidimensionale Untermannigfaltigkeit heißen Flächen.

$(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ heißen Hyperflächen.

Beispiel

Die Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2(1-x^2)-y^2 = 0\} =$  $\subset \mathbb{R}^2$ ist keine Untermannigfaltigkeit. $M \setminus \{(0,0)\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit.

Beispiel

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^r$ eine C^k-Abbildung.

Dann ist der *Graph* von f

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in U \times \mathbb{R}^r | y = f(x)\}$$

eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, wobei $n = m + r$.

Die C^k-Immersion $F : U \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = (x, f(x))$, bildet U homöomorph auf $F(U) = \Gamma_f$ ab.

Beispiel

Die Sphäre S^2 ist eine C^∞-Fläche.

Sie besitzt nämlich eine Überdeckung durch 6 Halbsphären

$$H_i^\pm := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 | \pm x_i > 0\}$$

und jede der Halbsphären ist ein Graph. Z.B. ist $H_1^+ = \{(f(u), u) | u \in U\}$ mit $f : U = \{u \in \mathbb{R}^2 | \|u\| < 1\} \to \mathbb{R}$, $f(u) = \sqrt{1 - \|u\|^2}$.

Beispiel: Die stereographische Projektion der Sphäre

Wir betrachten die beiden Abbildungen $\varphi_\pm : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

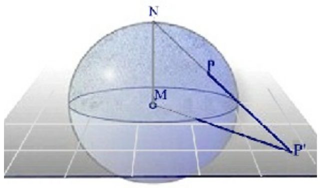
$$\varphi_\pm(x,y) \;:=\; \frac{1}{1 + \|(x,y)\|^2} \left(2x, 2y, \pm(\|(x,y)\|^2 - 1)\right).$$

Beides sind Immersionen mit $Im(\varphi_\pm) \subset S^2$ (ÜA).

Seien $N^\pm = (0,0,\pm 1)$ der Nord- und Südpol der Sphäre. Dann sind $\varphi_\pm : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N^\pm\}$ Homöomorphismen mit der Umkehrabbildung (ÜA)

$$\varphi_\pm^{-1} \;:\; S^2 \setminus \{N^\pm\} \;\to\; \mathbb{R}^2 \;, \quad \varphi_\pm^{-1}(x,y,z) := \left(\frac{x}{1 \mp z}, \frac{y}{1 \mp z}\right)$$

$\varphi_{\pm}^{-1}$ heißt *stereographische Projektion aus dem Nord/Südpol*. Sie ordnet jedem Punkt $P \in S^2 \setminus \{N^{\pm}\}$ den Schittpunkt P' der Gerade durch P und $N^{\pm}$ mit dem $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ zu.



Untermannigfaltigkeiten und Abbildungen von konstantem Rang

Satz 88. *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung von konstantem Rang r und $q \in f(U)$. Dann ist*

$$M = f^{-1}(q) \subset U$$

eine C^k-Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - r$.

Beweis. Sei $p = (p_1, \ldots, p_m) \in M$. Mit Hilfe der Normalform von Abbildungen von konstantem Rang können wir annehmen, dass

$$f : (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$$

auf einer offenen Umgebung $V = V_1 \times V_2 \subset U \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ von p.

Dann ist aber $V_2 \ni y \mapsto (p_1, \ldots, p_r, y) \in V = V_1 \times V_2$ eine Immersion, die V_2 homöomorph auf $M \cap V = f^{-1}(p_1, \ldots, p_r, 0, \ldots, 0)$ abbildet. $\square$

Beispiele

(i) Die Abbildung $f : \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$, $A \mapsto A^t A$, hat überall den Rang $n(n+1)/2$. Somit ist $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(\mathbf{1}_n) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ eine (kompakte) C^∞-Untermannigfaltigkeit der Dimension $n(n-1)/2$.

(ii) Man zeigt auf ähnliche Weise, dass $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ eine (kompakte) C^∞-Untermannigfaltigkeit der (reellen) Dimension n^2 ist (ÜA).

(iii) Sei $p \in \mathbb{R}^{n+1}$. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x - p\|^2$, definiert eine Submersion von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{p\}$ auf $\mathbb{R}_+$. Die n-dimensionalen Sphären $S^n_r(p) = f^{-1}(r^2) \subset \mathbb{R}^n$ $(r > 0)$ sind also C^∞-Hyperflächen.

(iv) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^r$ eine C^k-Abbildung und $\Gamma_f = \{(x, F(x)) \in U \times \mathbb{R}^r\}$ der Graph von F.

Dann gilt: die Abbildung $f : \mathbb{R}^{m+r} \to \mathbb{R}^r$ definiert durch $f(x, y) := y - F(x)$ ist eine Submersion und

$$\Gamma_F = f^{-1}(0).$$

Untermannigfaltigkeiten und Submersionen

Satz 89. *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $p \in M$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt und eine C^k-Submersion $f : V \to \mathbb{R}^{n-m}$, so dass $M \cap V = f^{-1}(0)$.*

Beweis. "$\Longrightarrow$" Sei $F : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung, wobei $U \subset \mathbb{R}^m$ und $p \in F(U) = M \cap V$.

Wegen der Normalform von Immersionen können wir annehmen, dass $F : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$.

$f : V \to \mathbb{R}^r$, $f(x_1, \dots, x_n) = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, ist dann die gesuchte Submersion.

Die Umkehrung folgt aus dem vorherigen Satz. $\square$

7.5 Tangentialraum

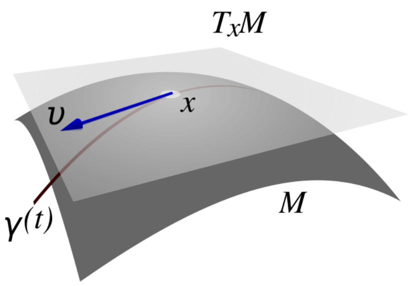
Tangentialraum

Definition 50 (Tangentialvektoren). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit und $x \in M$.*

Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M in x, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\gamma(0) = x \quad \text{und} \quad v = \gamma'(0).$$

Die Menge aller Tangentialvektoren an M in x heißt Tangentialraum und wird mit T_xM bezeichnet.



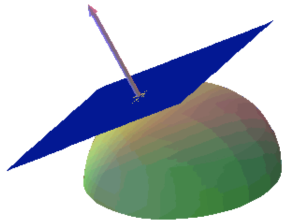
Beispiel: Tangentialraum an die Sphäre
Sei $S_r^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-dimensionale Sphäre vom Radius r. Dann gilt für alle $p \in S_r^n$, dass

$$T_pS_r^n \ = \ p^\perp.$$

Es gilt $v \in T_pM \iff \exists$ eine Kurve $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_r^n$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$.

Dann gilt $r^2 \equiv \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} (\gamma_i(t))^2$ und somit

$$0 = \frac{d}{dt}|_{t=0} \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i(0)(\gamma_i)'(0) = \langle p, v \rangle.$$



Satz 90 (Eigenschaften des Tangentialraumes)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit und T_pM der Tangentialraum an M in $p \in M$. Dann gilt:*

(i) *T_pM ist ein Vektorraum der Dimension $m = \dim M$.*

(ii) *Sei $F : U \subset \mathbb{R}^m \to V$ eine lokale Parametrisierung von M, $u \in U$ mit $p = F(u)$.*

Dann bilden die Vektoren $\partial_1 F(u), \ldots, \partial_m F(u)$ eine Basis von T_pM.

(iii) *Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von p und $f = (f_1, \ldots, f_{n-m}) : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ eine C^1-Submersion, so dass $M \cap V = f^{-1}(q)$, wobei $q = f(p)$. Dann ist $T_pM = \mathrm{Kern}(df_p) = \cap_{j=1}^{n-m} (\mathrm{grad}\, f_j(p))^\perp$.*

(iv) *Insbesondere gilt $T_pM^\perp = \mathrm{span}\{\mathrm{grad}\, f_1(p), \ldots, \mathrm{grad}\, f_{n-m}(p)\}$.*

Beweis. Da $\mathrm{Rang}(F) = m$ und $\mathrm{Rang}(f) = n - m$, genügt es zu zeigen, dass

$$\mathrm{span}\{\partial_1 F(u), \ldots, \partial_m F(u)\} \subset T_pM \qquad (*)$$

$$\text{und} \qquad \mathrm{grad}\, f_j(p) \perp T_pM \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n-m, \qquad (**)$$

denn $(*)$ impliziert $\dim(T_pM) \geq m$ und $(**)$ impliziert $\dim(T_pM) \leq n-(n-m) = m$.

Sei nun $v = \sum_{i=1}^m v_i e_i \in \mathbb{R}^m$. Dann definiert $c(t) := F(u + tv)$ eine C^1-Kurve $(-\varepsilon, \varepsilon) \to F(U) \subset M$ mit

$$c'(0) = dF_p v = \sum_{i=1}^m v_i \partial_i F(u).$$

Das beweist $(*)$.

Für jede C^1-Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to F(U) \subset M$ mit $c(0) = p$ gilt $f(c(t)) \equiv q$ und somit $0 = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(c(t)) = df_p c'(0)$.

Das zeigt $T_pM \subset \mathrm{Kern}(df_p) = \cap_{j=1}^{n-m} (\mathrm{grad}\, f_j(p))^\perp$ und damit $(**)$. $\square$

Beispiele:

- Tangentialraum an die Sphäre:

  Es ist $S^n = f^{-1}(0)$ wobei $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die Submersion ist, die durch $f(x) = \|x\|^2 - 1$ gegeben ist. Damit ist $T_pM = (\mathrm{grad}\, f)^\perp = 2p^\perp$.

- Tangentialraum an einen Graphen:

  Sei $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine C^k-Abb. und $\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)) \in U \times \mathbb{R}\}$ der Graph von φ.

  Dann ist $F : U \to \mathbb{R}^{m+1}$, $F(x) = (x, \varphi(x))$ eine Parametrisierung und

  $$T_p\Gamma_\varphi = \operatorname{span}\left((e_i, \partial_i\varphi(p))^t\right)_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

  Ist $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^r$, $f(x,y) = \varphi(x) - y$ die durch den Graphen definierte Submersion, dann gilt auch

  $$T_p\Gamma_\varphi \;=\; (\operatorname{grad} f(p, \varphi(p)))^\perp \;=\; (\operatorname{grad}\, \varphi(p), -1)^\perp.$$

  Beachte, dass $\langle(\operatorname{grad}\, \varphi(p), -1), (e_i, \partial_i\varphi(p))\rangle = 0$.

  Dies gilt natürlich auch für $\varphi : U \to \mathbb{R}^r$ mit $r > 1$.

7.6 Extrema mit Nebenbedingungen

Extrema mit Nebenbedingungen

Satz 91 (Extrema mit Nebenbedingungen)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in M \cap U$ differenzierbar*

(i) Wenn $F = f|_{U\cap M}$ im Punkt p ein lokales Extremum annimmt, so ist

$$(*) \qquad T_pM \subset \operatorname{Kern} df_p = (\operatorname{grad} f(p))^\perp.$$

(ii) $(*)$ gilt genau dann, wenn es Konstanten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ (sogenannte Lagrangemultiplikatoren) gibt mit

$$\operatorname{grad} f(p) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \operatorname{grad} h_j(p),$$

wobei $r = m - n$ und $h = (h_1, \ldots, h_r) : U \to \mathbb{R}^r$ eine C^1-Submersion ist, so dass $M \cap U = h^{-1}(0)$.

Beweis. Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \cap U \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve mit $c(0) = p$.

$f \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ hat ein lokales Extremum in 0 und somit

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(c(t)) = df_p c'(0) = \langle \operatorname{grad} f(p), c'(0)\rangle.$$

Das beweist (i), d.h. $T_pM \subset (\operatorname{grad}\, f)^\perp$. Das impliziert aber $\operatorname{grad}\, f \subset (T_pM)^\perp$. Damit folgt (ii) aus

$$T_pM^\perp = \operatorname{span}\{\operatorname{grad} h_1(p), \ldots, \operatorname{grad} h_r(p)\}.$$

$\square$

Beispiel
Hiermit können wir (erneut) zeigen, dass jeder symmetrische Endomorphismus A eines endlichdimensionalen Euklidischen Vektorraums V einen Eigenvektor hat:

Da die Einheitssphäre $S = S_1^n(0) \subset V$ kompakt ist, nimmt die stetige Funktion (genauer quadratische Form) $x \mapsto f(x) := \langle x, Ax \rangle$ in einem Punkt $p \in S$ ihr Minimum an.

Nach dem vorherigen Satz gilt also

$$\operatorname{grad} f(p) = 2Ap \in (T_pS)^\perp = \mathbb{R}p,$$

d.h. p ist ein Eigenvektor von A. (Der Lagrangemultiplikator ist der Eigenwert!)

8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

8.1 Definition und Beispiele

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Eine gewöhnliche Differentialgleichung (DG) besteht aus einer oder mehreren Gleichungen an eine oder mehrere Funktionen *einer Variablen* und deren Ableitungen. Eine Lösung dieser Gleichung ist durch Anfangsbedingungen (AB) bestimmt.

Wir kennen schon einige Differentialgleichungen:

- Erfülle die differenzierbare Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ die DG $x'(t) \equiv 0$. Eine Lösung ist $x(t) \equiv c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. D.h. wir müssen noch eine *Anfangsbedingung* stellen: $x(t_0) = c$.
- Die DG *zweiter Ordnung* $x''(t) \equiv 0$ hat die Lösungen $x(t) = at + b$ wobei $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. Diesmal müssen wir zwei AB'en stellen: $x(t_0) = b_0$ und $x'(t_0) = a_0$. Dann ist $x(t) = a_0(t - t_0) + b_0$ eine Lösung.
- Die DG $x'(t) = t^2$ mit der AB $x(0) = c$ hat die Lösung $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + c$.
- Die DG $x'(t) = x(t)$ mit der AB $x(0) = c$ hat die Lösung $x(t) = c\mathrm{e}^t$.

Warum interessieren wir uns für DG'en:
Die Bewegung eines Punktes im Raum wird beschrieben durch eine Kurve im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{aligned}$$

$x'(t)$ gibt dann die Geschwindigkeit und $x''(t)$ die Beschleunigung zum Zeitpunkt t an. Auf den Punkt wirke eine Kraft F, die vom Ort x, der Zeit t und der Geschwindigkeit $x'(t)$ des Punktes abhängt, d.h. $F = F(x, x', t)$. Das Newtonsche Bewegungsgesetz der Mechanik hat dann folgende Form

$$m \cdot x''(t) = F(x(t), x'(t), t).$$

Unter der Annahme, dass F, $x(t_0)$ und $x'(t_0)$ bekannt sind, versucht man, die Bewegungskurve des Punktes zu bestimmen.

Dies ist ein Anfangswertproblem der Form

$$x''(t) = \frac{1}{m} F(x, x', t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0.$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Definition 51 (Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.*

- *Dann heißt die Gleichung*
$$x'(t) \;=\; f(x,t) \tag{1}$$
Differentialgleichung erster Ordnung in x. (Meist schreiben wir auch nur $x' = f(x,t)$.)

- *Unter einer Lösung der DG (1) versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$, so dass*
  - *(i) $(\varphi(t), t) \in \Omega$ für alle $t \in I$,*
  - *(ii) $\varphi'(t) = f(\varphi(t), t)$ für alle $t \in I$.*

- *Sei $t_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$. Eine Lösung φ der DG (1) mit $\varphi(t_0) = c$ heißt Lösung des Anfangswertproblems zu (1) mit Anfangsbedingung*
$$x(t_0) \;=\; c. \tag{2}$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung

Definition 52 (Gewöhnliche DG höherer Ordnung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig.*
$$x^{(k)} = f(x, x', \ldots, x^{(k-1)}, t) \tag{3}$$
heißt gewöhnliche DG k-ter Ordung.

- *Unter einer Lösung versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte k-mal differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$, so dass*
  - *(i) $(\Phi(t), t) \in \Omega$ für alle t, wobei $\Phi = (\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(k-1)}) : I \to \mathbb{R}^k$ und*
  - *(ii) $\varphi^{(k)}(t) = f(\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(k-1)}(t), t)$ für alle $t \in I$.*

- *Sei $t_0 \in I$ und $(c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$. Das Anfangswertproblem (AWP) ist gegeben durch (3) und*
$$\left.\begin{array}{rcl} x(t_0) & = & c_1 \\ x'(t_0) & = & c_2 \\ & \vdots & \\ x^{(k-1)}(t_0) & = & c_k \end{array}\right\} \tag{4}$$

Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Definition 53 (Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n\cdot k} \times \mathbb{R}$ *und* $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *stetig.*

$$x^{(k)} = F(x, x', \dots, x^{(k-1)}, t) \tag{5}$$

heißt System gewöhnlicher DG'en k-ter Ordung an $x = (x_1, \dots x_n)$*.*

- *Unter einer Lösung versteht man eine differenzierbare Kurve* $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ *mit*
  - *(i)* $(\Phi(t), t) \in \Omega$ *für alle* t*, wobei* $\Phi = (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(k-1)}) : I \to \mathbb{R}^{nk}$ *und*
  - *(ii)* $\varphi^{(k)}(t) = F(\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t), t)$ *für alle* $t \in I$*.*
- *Sei* $t_0 \in I$ *und* $c_1, \dots, c_k$ *Vektoren in* $\in \mathbb{R}^n$*. Das Anfangswertproblem (AWP) ist gegeben durch* (5) *und*

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t_0) & = & c_1 \\ x'(t_0) & = & c_2 \\ & \vdots & \\ x^{(k-1)}(t_0) & = & c_k \end{array}\right\} \tag{6}$$

Reduktion von Systemen höherer Ordnung

Satz 92. *Sei* $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{n\cdot k} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *stetig und* $F^* : \Omega \to \mathbb{R}^{n\cdot k}$ *definiert durch* $F^*(y_0, \dots, y_{k-1}, t) := (y_1, \dots, y_{k-1}, F(y_0, \dots, y_{k-1}, t))$*, wobei* $y_j \in \mathbb{R}^n$ *für alle* $j \in \{0, \dots, k-1\}$*. Dann gilt:*

(1) Ist $x : I \to \mathbb{R}^n$ *eine Lösung des AWP's k-ter Ordnung*

$$x^{(k)} = F(x, \dots, x^{(k-1)}, t) \text{ mit AB'en} \left\{\begin{array}{rcl} x(t_0) & = & a_1 \\ & \vdots & \\ x^{(k-1)}(t_0) & = & a_k, \end{array}\right\} \tag{7}$$

so ist $y := \big(x, x', \dots, x^{(k-1)}\big) : I \to \mathbb{R}^{n\cdot k}$ *eine Lösung des AWP's*

$$y' = F^*(y, t), \qquad y(t_0) = (a_1, \dots, a_k) \tag{8}$$

(2) Ist $y = (y_0, \dots, y_{k-1}) : I \to \mathbb{R}^{nk}$ *eine Lsg. des AWP's* (8) *erster Ordnung, so ist* $y_0 : I \to \mathbb{R}$ *eine Lsg. des AWP's* (7) *k-ter Ordnung.*

Beweis: Nach Definition von F^* ist $y'(t) = F^*(y(t), t)$ äquivalent zu

$$y_0'(t) = y_1(t), \ \dots, \ y_{k-2}'(t) = y_{k-1}(t), \ y_{k-1}'(t) = F(y_0, \dots, y_{k-1}, t).$$

Die Behauptung folgt dann sofort durch Einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} x(t) \text{ löst } (7) & \Longrightarrow & y(t) = (x(t), \dots, x^{(k-1)}(t)) \text{ löst } (8) \\ y(t) \text{ löst } (8) & \Longrightarrow & x(t) = y_0(t) \text{ löst } (7). \end{array} \qquad \square$$

Beispiel: Schwingungsgleichung ohne Reibung

Die Bewegung einer Masse m, die reibungsfrei an einer Feder auf der x-Achse um 0 gleitet, wird beschrieben durch die DG 2. Ordnung

$$x''(t) = -\tfrac{k}{m}x = F(x, x', t) \text{ mit } F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x_0, x_1, t) = -\tfrac{k}{m}x_0. \tag{9}$$

Wir führen nun (9) auf das System erster Ordnung zurück

$$(y_0'(t), y_1'(t)) = (y_1(t), -\tfrac{k}{m}y_0(t)) = F^*(y_0, y_1, t),$$

wobei $F^* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $F^*(y_0, y_1, t) = (y_1, F(y_0, y_1, t)) = (y_1, -\frac{k}{m}y_0)$. Das heißt, $x(t)$ löst genau dann (9), wenn $(y_0(t), y_1(t)) := (x(t), x'(t))$ folgendes Differentialgleichungssystem erster Ordnung löst

$$\begin{pmatrix} y_0'(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ -\frac{k}{m}y_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix},$$

d.h. $y'(t) = A \cdot y(t)$, mit einer konstanten Matrix A. Solche DG'en nennt man lineare DG-Systeme mit konstanten Koeffizienten.

Autonome Differentialgleichungen und Vektorfelder

Definition 54.

- *Ein DG-System der Form $x^{(k)} = F(x, \ldots, x^{(k-1)})$, bzw. $x' = F(x)$ falls $k = 1$, heißt autonom (d.h., F hängt nicht von t selbst ab).*
- *Ein stetiges Vektorfeld (ab jetzt, kurz: Vektorfeld) auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $V : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Man nennt U den Phasenraum des Vektorfeldes V.*
- *Eine C^1–Kurve $\gamma_{x_0} : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \longrightarrow U$ heißt Integralkurve des Vektorfeldes V durch $x_0 \in U$, falls gilt*

$$V(\gamma_{x_0}(t)) = \gamma_{x_0}'(t)\ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \textit{und} \quad \gamma_{x_0}(0) = x_0.$$

D.h. $V(\gamma_{x_0}(t))$ ist gleich dem Tangentialvektor der Kurve γ_{x_0} in t. Die Integralkurven eines Vektorfeldes $V : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sind also Lösungen der autonomen Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = V(\gamma(t)) \text{ mit der Anfangsbedingung } \gamma(0) = x_0.$$

Beispiel: Lineare Vektorfelder auf dem $\mathbb{R}^2$

- Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld definiert durch $U(x, y) = \lambda \cdot (x, y)$. Eine Integralkurve von U durch $p := (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist dann gegeben durch
$$\gamma_p = \mathsf{e}^{\lambda t}p,$$
denn $\gamma_p'(t) = \lambda \mathsf{e}^{\lambda t}p = \lambda\gamma_p(t) = U(\gamma_p(t))$.
- Sei V das Vektorfeld $V(x, y) = (-y, x)$. Eine Integralkurve durch $p = (r^2, 0)$ ist dann gegeben durch $\gamma_p(t) = r^2(\cos t, \sin t)$, denn $\gamma_p'(t) = r^2(-\sin t, \cos t) = V(\gamma_p(t))$.
- Sei W das Vektorfeld $W(x, y) = (y, x)$. Eine Integralkurve durch $p = (r^2, 0)$ ist dann gegeben durch $\gamma_p(t) = r^2(\cosh t, \sinh t)$, denn $\gamma_p'(t) = r^2(\sinh t, \cosh t) = W(\gamma_p(t))$.

8.2 Elementare Lösungsmethoden für DG'en 1. Ordnung

Elementare Lösungsmethoden für DG'en 1. Ordnung

In diesem Abschnitt betrachten wir Differentialgleichungen der Form

$$x' = F(x,t)$$

wobei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist. D.h., eine Lösung ist eine differenzierbare Funktion $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Wir geben elementare Lösungsmethoden an, für Fälle, in denen F eine einfache Gestalt hat. Diese Verfahren basieren meist auf der Möglichkeit der *Trennung der Variablen*: Hierbei ist $F(x,t) = f(t) \cdot g(x)$, d.h. $x' = f(t) \cdot g(x)$.

(Formal ist dann $\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$ und deshalb $\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$; Integration liefert die Lösung.)

Trennung der Variablen

Definition 93. Eine *DG mit getrennten Variablen* ist eine DG folgenden Typs

$$x'(t) = f(t) \cdot g(x(t)) \quad \text{mit AB } x(t_0) = x_0, \tag{10}$$

wobei $f : I_1 \to \mathbb{R}$ und $g : I_2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig sind, $(t_0, x_0) \in I_1 \times I_2$ und I_1, I_2 offene Intervalle.

Satz 94 (DG mit getrennten Variablen)**.** *Das AWP (10) besitzt auf einem Intervall $J \subset I_1$ um t_0 die eindeutige Lösung*

$$x(t) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right),$$

wobei G eine Stammfkt. von $\frac{1}{g}$ auf I_2 und G^{-1} die Umkehrfkt. von G ist. J ist gegeben durch $J = \left\{t \in \mathbb{R} \mid G(x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds \in Im(G)\right\}$.

Beweis.

Existenz: Da $\frac{1}{g}$ stetig und ohne Nullstellen ist, ist die Stammfkt. G streng monoton und somit umkehrbar mit $G^{-1} : Im(G) \to I_2$. Dann erfüllt

$$x(t) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right).$$

die DG (10), denn nach der Kettenregel ist

$$x'(t) = \frac{1}{G'(x(t))}(G(x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\,ds)' = g(x(t)) \cdot f(t).$$

$x(t)$ ist definiert für diejenigen t, für die $G(x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\,ds \in Im(G)$.

Weiter im Beweis.
Eindeutigkeit: Sei x eine Lösung von (10)
Wir integrieren die Gleichung $\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t)$ von t_0 bis T nahe t_0:

$$\int_{t_0}^{T} \frac{x'(t)}{g(x(t))}\, dt = \int_{t_0}^{T} f(t)\, dt.$$

Die Substitution $x = x(t)$ ergibt $dx = x'(t)\, dt$ und

$$\int_{t_0}^{T} f(t)\, dt = \int_{x_0}^{x(T)} \frac{dx}{g(x)} = G(x(T)) - G(x_0)$$

für G die Stammfunktion von $\frac{1}{g}$. D.h. x ist eindeutig bestimmt. □

Beispiele

- Eine autonome DG $x' = g(x)$, $x(t_0) = x_0$ ist eine DG mit getrennten Variablen und $f \equiv 1$. Ist G eine Stammfunktion von $1/g$, so ist $x(t) := G^{-1}(t+G(x_0)-t_0)$ eine Lösung.

  Sei z.B. $x' = x$ mit $x(0) = c > 0$. Dann ist $G(x) = \ln x$ die Stammfunktion von $1/x$ mit Umkehrfunktion $G^{-1}(x) = \mathsf{e}^x$. Somit ist die Lösung gegeben durch

  $$x(t) = \mathsf{e}^{t+\ln c} = c \cdot \mathsf{e}^t.$$

- Sei $x' = t \cdot x^2$ mit AB $x(0) = c \neq 0$. Dann ist $G(x) = -\frac{1}{x}$ die Stammfunktion von $1/x^2$ mit Umkehrfunktion $G^{-1}(x) = -\frac{1}{x}$. Andererseits ist $\int_0^t s\, ds = \frac{1}{2}t^2$. Somit ist die Lösung gegeben durch

  $$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{c} - \frac{t^2}{2}}$$

Euler–homogene Differentialgleichungen

Definition 95. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Eine *Euler–homogene DG* ist eine DG vom Typ

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right), \quad (x,t) \text{ mit } \frac{x}{t} \in I \tag{11}$$

Lösungsmethode: Die Substitution $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ ergibt

$$u' = \frac{x' \cdot t - x}{t^2} = \frac{1}{t}\left(x'(t) - \frac{x}{t}\right) \overset{(11)}{=} \frac{1}{t}\left(f(u) - u\right).$$

D.h., löst $x(t)$ die DG (11), so löst $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ die DG mit getr. Variablen

$$u'(t) = \frac{1}{t}(f(u) - u). \tag{12}$$

Wir bestimmen also $u(t)$ mit der Methode der Trennung der Variablen aus (12). Dann löst $x(t) = t \cdot u(t)$ die Euler–homogene DGL (11), denn

$$x' \;=\; tu' + u \;\overset{(12)}{=}\; f(u) - u + u \;=\; f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Beispiel
Wir betrachten die DGL $x' = 1 + \frac{x}{t}$ mit der Anfangsbedingung $x(1) = x_0$, und wir suchen Lösungen auf $(0, \infty)$. Dann gilt

$$u(t) = \frac{x(t)}{t} \implies u' = \frac{x' \cdot t - x}{t^2} = \frac{1}{t^2}(t + x - x) = \frac{1}{t}.$$

Somit ist $u'(t) := \frac{1}{t}$, $u(1) = x_0$ zu lösen. Die Lösung ist aber offensichtlich gegeben durch $u(t) = \ln(t) + x_0$. Folglich erhalten wir als Lösung für $x' = 1 + \frac{x}{t}$, $x(1) = x_0$:

$$x(t) = t(\ln(t) + x_0) \quad \forall t \in (0, \infty).$$

Lineare Differentialgleichungen

Definition 96. Eine *lineare DG* ist eine DG der Form

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t), \tag{13}$$

wobei $p, q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind. Ist $q(t) \equiv 0$ so heißt (13) *homogene lineare DG*. (13) heißt *inhomogene lineare DG*, falls $q \neq 0$.

Satz 97 (Homogene lineare DG)**.** *Jede Lösung einer homogenen, linearen DG $x' = p(t)x$ ist gegeben durch*

$$x(t) = c \cdot \mathrm{e}^{\int p(t)dt},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ konstant und $\int p(t)dt$ eine Stammfunktion von p ist. Das AWP $x' = p(t)x$ mit der AB $x(t_0) = x_0$ hat genau eine Lösung $x : I \to \mathbb{R}$

$$x(t) = x_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}.$$

Beweis. $x' = p(t)x$ ist eine DGL mit getrennten Variablen.
Somit ist die Lösung des AWP's eindeutig gestimmt.
In der Tat erfüllt $x(t) = x_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$ das AWP, denn

$$x'(t) \;=\; x_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds} \cdot \Big(\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big)' \;=\; x(t)p(t) \quad \text{und } x(t_0) = x_0.$$

D.h. aber, dass die allgemeine Lösung von $x'(t) = p(t)x(t)$ von der Gestalt $x(t) = c \cdot \mathrm{e}^{\int p(t)\,dt}$ ist. □

Satz 98. *Sei $x_s : I \to \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Linearen DG $x' = p(t)x + q$ mit $q \neq 0$. Dann erhält man alle Lösungen x der inhomogenen Gleichung mittels $x = x_s + x_c$ mit einer allgemeinen Lösung*

$$x_c(t) := c\mathrm{e}^{\int p(t)dt}$$

der homogenen Gleichung $x' = p(t)x$.

Beweis. $x - x_s$ löst die homogene lineare Gleichung. D.h. $x - x_s = x_c$. □

Wie findet man nun eine spezielle Lösung x_s der inhomogenen Gleichung $x' = p(t)x + q(t)$?

1. Methode: Variation der Konstanten

Wir betrachten eine Lösung $x(t) = c \cdot \mathrm{e}^{\int p(t)\,dt}$ der homogenen, linearen DG $x' = p(t)x$ und machen den folgenden Ansatz: Angenommen,

$$x_s(t) := c(t)\mathrm{e}^{\int p(t)\,dt}$$

löse die inhomogene, lineare DG $x' = p(t)x + q(t)$.

Man bestimmt daraus $c(t)$. Es gilt

$$\begin{aligned} p(t)x_s + q(t) \;=\; x_s' &= c'(t)\cdot \mathrm{e}^{\int p(t)\,dt} + c(t)\cdot p(t)\cdot \mathrm{e}^{\int p(t)\,dt} \\ &= c'(t)\cdot \mathrm{e}^{\int p(t)\,dt} + p(t)\cdot x_s(t). \end{aligned}$$

Folglich ist $c'(t) = q(t)\cdot \mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt}$ und somit $c(t) = \int q(t)\cdot \mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt}\,dt$. Mit diesem $c(t)$ ist $x_s(t) = c(t)\mathrm{e}^{\int p(t)\,dt}$ eine Lösung der inhomogenen, linearen DGL $x' = p(t)x + q(t)$.

Beispiel zur Variation der Konstanten

Wir betrachten die inhomogene, lineare DG und das AWP

$$x' = tx + te^{t^2} \quad \text{mit AB } x(0) = x_0. \tag{14}$$

Die allgemeine Lsg. der homogenen DG $x' = tx$ ist $x(t) = ce^{\int t dt} = ce^{\frac{1}{2}t^2}$. Variation der Konstanten: Sei $x_s(t) = c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}$ eine spezielle Lösung. Dann

$$x_s'(t) \;=\; c'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + c(t)te^{\frac{t^2}{2}} \;=\; c'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + tx_s(t) \;\overset{(14)}{\Longrightarrow}\; c'(t)e^{\frac{t^2}{2}} = te^{t^2}$$

Folglich ist $c' = te^{\frac{t^2}{2}} = (e^{\frac{t^2}{2}})'$. Also ist $c(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ eine Lösung für $c(t)$ und $x_s(t) = e^{t^2}$ ist eine spezielle Lösung der inhomogenen, linearen DG. Damit ist $x(t) = e^{t^2} + ce^{\frac{t^2}{2}}$ allgemeine Lösung der inhomogenen DGL. Wir bestimmen die Konstante c aus der AB $x(0) = x_0$. Wegen $x_0 = 1 + c$ ist

$$x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\Big(e^{\frac{t^2}{2}} + x_0 - 1\Big).$$

die einzige Lösung des Anfangswertproblems (14).

2. Methode: Ansätze für x_s bei $p(t) \equiv p \neq 0$ konstant

Wir betrachten die inhomogene lineare DG $x'(t) = px(t) + q(t)$ mit $p \neq 0$ konstant.

(1) Ist die Störfunktion $q(t)$ ein Polynom $h(t)$ vom Grad m mit reellen Koeffizienten, so setze für $x_s(t)$ ein Polynom Q vom Grad m an.

(2) Ist $q(t)$ von der Form $h(t)\cdot e^{at}$, so setze für $x_s(t)$ die Funktion $Q(t)\cdot e^{at}$ $(p \neq a)$ bzw. $t \cdot Q(t)\cdot e^{at}$ $(p = a)$ an (h, Q wie oben).

(3) Ist $q(t)$ von der Form $h(t)\cdot\cos(bt)$ oder $h(t)\cdot\sin(bt)$, $h \in \mathbb{R}[t]$, $b \neq 0$, so setze für $x_s(t)$ die Funktion $Q_1(t)\cdot\cos(bt) + Q_2(t)\cdot\sin(bt)$ an.

(4) Ist $q(t)$ von der Form $h(t)\cdot\cos(bt)\cdot e^{at}$ oder $h(t)\cdot\sin(bt)\cdot e^{at}$, $h \in \mathbb{R}[t]$, $b \neq 0$, so setze für $x_s(t)$ die Funktion $Q_1(t)e^{at}\cdot\cos(bt) + Q_2(t)e^{at}\cdot\sin(bt)$ an.

Dann setzt man den Ansatz in die inhomogene, lineare DGL ein und berechnet die Koeffizienten des Polynoms $Q(t)$ durch Koeffizientenvergleich.

Die Bernoullische Differentialgleichung

Definition 99. Eine *Bernoullische DGL* ist eine DGL des folgenden Types

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t)x(t)^{\alpha}, \tag{15}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup \{1\})$ und $p, q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind.

Eine Bernoullische DGL wird durch die Substitution $u(t) := x(t)^{1-\alpha}$ behandelt. Man erhält

$$\begin{aligned} u' &= (1-\alpha)x^{-\alpha} \cdot x' &&= (1-\alpha)x^{-\alpha}(p(t)x + q(t)x^{\alpha}) \\ & &&= (1-\alpha)p(t)x^{1-\alpha} + (1-\alpha)q(t). \end{aligned}$$

Für $u(t)$ erhält man also eine lineare DGL

$$u' = (1-\alpha)p(t)u + (1-\alpha)q(t).$$

Diese wird gelöst mit $u(t)$. Dann erhält ist $x(t) = u(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ als Lösung der Bernoullischen DGL.[0,2cm]

Beispiel zur Bernoullischen DG
Wir betrachten eine Bernoullische DG

$$x' = -x + t\sqrt{x}\,, \quad \text{d.h. } \alpha = 1/2. \tag{16}$$

Wir setzen $u(t) := x(t)^{\frac{1}{2}}$ und erhalten

$$u' = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}x' \;=\; \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(-x + t\sqrt{x}) \;=\; -\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}t = -\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}t. \tag{17}$$

Für die homogene lineare DGL $u' = -\frac{1}{2}u$ erhält man als allgemeine Lösung $u(t) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$. Um nun eine spezielle Lösung u_s der inhomogenen, linearen DGL (17) $u' = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}t$ zu finden, machen wir den folgenden Ansatz mit einem Polynom ersten Grades als Lösung: $u_s = at + b$ (siehe *2. Methode (1)*). Daraus ergibt sich

$$a \;= u_s' \;=\; -\frac{1}{2}u_s + \frac{1}{2}t \;=\; -\frac{1}{2}(at+b) + \frac{1}{2}t.$$

Dies hat zur Folge, dass $a = 1$ und $b = -2$ ist.

Weiter im Beispiel zur Bernoullischen DG
Damit haben wir mit $u_s(t) = t - 2$ eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL (17) gefunden. Somit ist $u(t) = t - 2 + c\, e^{-\frac{1}{2}t}$ eine allgemeine Lösung der inhomogenen, linearen DGL (16), und wir erhalten

$$x(t) = \left(t - 2 + c\, e^{-\frac{1}{2}t}\right)^2$$

als allgemeine Lösung der Bernoullischen DG (16) $x' = -x + t\sqrt{x}$.

Exakte Differentialgleichung

Sei $V = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein differenzierbares Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$. Falls es eine differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\text{grad}F(x_1, x_2) = V(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2)),$$

so gilt wegen des Lemmas von Schwarz

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}. \tag{18}$$

Bemerkung

Ist die offene Menge U sternförmig, so findet man zu jedem diff.-baren Vektorfeld $V = (P, Q) : U \to \mathbb{R}^2$, welches $\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}$ erfüllt, auch eine Funktion $F \in C^2(U, \mathbb{R})$ mit $V = \text{grad}F$.

F heißt dann *Potentialfunktion* von V.

Exakte Differentialgleichung

Definition 100. Seien $P, Q \in C^1(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, zusammenhängend und gelte auf U

$$\tfrac{\partial P}{\partial x_2} = \tfrac{\partial Q}{\partial x_1}, \quad \text{und} \quad Q \neq 0. \tag{19}$$

Dann heißt die DGL

$$P(t, x(t)) + Q(t, x(t)) \cdot x'(t) = 0 \tag{20}$$

exakte Differentialgleichung. (19) ist die *Integrabilitätsbedingung.*

Satz 101. *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R})$ mit $\frac{\partial F}{\partial x_1} = P$ und $\frac{\partial F}{\partial x_2} = Q$. Dann erhält man eine Lösung der exakten DG (20) mit der AB $x(t_0) = x_0$ durch Auflösen der Gleichung*

$$F(t, x) - F(t_0, x_0) = 0$$

nach x.

Beweis. Wegen des Lemmas von Schwarz ist die Integrabilitätsbedingung (19) erfüllt, d.h. es liegt eine exakte DG vor

Da $\frac{\partial F}{\partial x_2}(t_0, x_0) = Q(t_0, x_0) \neq 0$, folgt nach dem Satz über implizite Funktionen die eindeutige Auflösbarkeit von $F(t, x) - F(t_0, x_0) = 0$ nach x in $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Das heißt, es existiert eine C^1–Funktion $x : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $x(t_0) = x_0$ und $F(t, x(t)) - F(t_0, x_0) = 0$. Differenzieren nach t ergibt

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x(t))}_{=P(t,x(t))} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_2}(t, x(t))}_{=Q(t,x(t))} \cdot x'(t) = 0.$$

Somit erfüllt die Auflösung nach $x(t)$ die exakte DG. $\square$

Beispiel zur exakten DG

Wir betrachten die DGL $x + t + 1 + (x + t)x' = 0$ mit AB $x(t_0) = x_0$ und $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 + x_2) > 0\}$. Diese ist exakt:

$$P(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1, \quad Q(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \text{ also } \frac{\partial P}{\partial x_2} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x_1}.$$

Eine bis auf eine Konst. c eindeutige Potentialfkt. F von (P, Q) ist:

$$F(x_1, x_2) \; = \; \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + x_1 + c$$

Wir lösen $0 = F(t, x) - F(t_0, x_0) = \frac{1}{2}(t + x)^2 + t - \frac{1}{2}(t_0 + x_0)^2 - t_0$ nach x auf und erhalten $(t + x)^2 = 2(t_0 - t) + (t_0 + x_0)^2$ und somit

$$x(t) = \sqrt{(t_0 + x_0)^2 + 2(t_0 - t)} - t,$$

da $x + t > 0$. $x(t)$ ist Lösung der gegebenen DGL und der Definitionsbereich von x ist $\{t \in \mathbb{R} \mid t_0 + \frac{(t_0+x_0)^2}{2} \geq t\}$.

Exakte Differentialgleichung: Integrierender Faktor

Ist die Bedingung $\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}$ für die DG $P + Q \cdot x' = 0$ nicht erfüllt, so kann die Exaktheit durch die Multiplikation mit $\lambda \in C^1(U)$ erreicht werden.

Definition 102. $\lambda \in C^1(U)$, $\lambda \neq 0$ heißt *integrierender Faktor* (*Eulerscher Multiplikator*) der DG $P + Q \cdot x' = 0$, falls $\frac{\partial(\lambda P)}{\partial x_2} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x_1}$.

Es ist dann $(\lambda P) + (\lambda Q) \cdot x' = 0$ exakte DG (mit unveränderten Lösungen).

Beispiel

Sei $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, \; x_2 > 0\}$. Wir betrachten die DGL

$$5t^4 + 2x^3 + 3tx^2 \cdot x' = 0. \tag{21}$$

Hier ist $\frac{\partial P}{\partial x_2} = 6x_2^2 \neq \frac{\partial Q}{\partial x_1} = 3x_2^2$, das heißt (21) ist nicht exakt. Aber die Funktion $\lambda(x_1, x_2) = x_1$ ist ein integrierender Faktor für die DGL (21); wir können die exakte DGL $5t^5 + 2tx^3 + 3t^2x^2 \cdot x' = 0$ lösen.

8.3 Existenz und Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche DG'en

Existenz und Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche DG'en

Wir haben gesehen, wie sich bestimmte gewöhnliche DG'en (eindeutig) lösen lassen. Im folgenden Abschnitt wollen wir allgemeine Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen machen.

Dazu muss die "rechte Seite" f eine Bedingung erfüllen, die etwas stärker ist als die der Stetigkeit, und die wir schon vom Schrankensatz kennen.

Definition 55. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ *und* $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$.

f *heißt auf einer Teilmenge* $K \subset \Omega$ *bezüglich* x *Lipschitz-stetig mit der Lipschitzkonstanten* $L_K \geq 0$*, wenn*

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L_K \|x_1 - x_2\| \qquad (*)$$

für alle $(x_1, t), (x_2, t) \in K$.

f *heißt auf* Ω *bezüglich* x *lokal Lipschitz-stetig, wenn es zu jedem* $p \in \Omega$ *eine Umgebung* U *von* p *gibt, so dass* $(*)$ *für alle* $(x_1, t), (x_2, t) \in U \cap \Omega$ *mit einer Konstanten* L_U *gilt (die von* U *abhängen kann).*

Bemerkung zur Lipschitzstetigkeit
Abgesehen von dem herkömmlichen Stetigkeitsbegriff hatten wir auch den der gleichmäßigen Stetigkeit kennengelernt: Eine Abbildung f zwischen zwei metrischen Räumen heißt *gleichmäßig stetig*, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ für alle $x \in X$. D.h. das Wachstum der Abbildung ist gleichmäßig auf ganz X. Es gilt: Lipschitzstetgigkeit $\Rightarrow$ gleichm. Stetigkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit.
Die erste Implikation beweist man, indem man $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ wählt.

Beispiele:

- $f(x) = \cos(x)$ ist Lipschitz-stetig auf ganz $\mathbb{R}$ mit Lipschitzk. $L = 1$.
- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, denn $f(x + \delta) - f(x) = \frac{1}{x+\delta} - \frac{1}{x} = \frac{\delta}{x(x+\delta)} \to_{x\to 0} \infty$.
- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig (als stetige Abbildung auf einem Kompaktum), aber nicht Lipschitzstetig auf Intervallen $(0, a)$ und damit nicht lokal Lipschitzstetig, denn $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| \to_{x,y\to 0} \infty$.

Lipschitzstetigkeit

Satz 103 (Lipschitzbedingung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, d.h.stetig diff.-bar. Ist $K \times [a,b] \subset \Omega$ mit K kompakt und konvex, dann ist f auf $K \times [a,b]$ bezüglich x Lipschitz-stetig. Insbesondere ist f auf Ω bezüglich x lokal Lipschitz-stetig.*

Beweis. Der Beweis beruht auf dem Schrankensatz, der sich wiederum aus dem MWS ergab: Da $K \times [a,b] \subset \Omega$ kompakt und konvex ist und f stetig diff.-bar., ist nach dem Schrankensatz f auf $K\times[a,b] \subset \Omega$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstanter L. D.h. aber, dass

$$\|f(x_1,t) - f(x_2,t)\| \leq L\|(x_1,t) - (x_2,t)\| = L\|(x_1 - x_2, 0)\| = L\|x_1 - x_2\|,$$

und somit ist f auf $K \times [a,b]$ Lipschitz-stetig bzgl. x. □

Der Satz von Picard–Lindelöf

Satz 104 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf)**.** *Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $(x_0, t_0) \in U$ und $a, b > 0$ so, dass*

$$Q := \overline{B_b(x_0)} \times [t_0 - a, t_0 + a] \subset U,$$

wobei $\overline{B_b(x_0)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq b\}$ die abgeschl. Kugel vom Radius b um x_0 ist. Sei F Lipschitz-stetig auf Q bzgl. der x–Variablen und

$$M := \max_{(y,t)\in Q} \|F(y,t)\| \quad \text{und} \quad \sigma := \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Dann hat das AWP $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$ genau eine C^1-Lösung

$$x : [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

für die gilt $x(t) \in \overline{B_b(x_0)}$ für alle $t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$.

Beweis. Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz auf eine Abbildung zwischen Funktionenräumen anwenden. Sei $I := [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$. Dazu betrachten wir um die Funktion, die konstant x_0 ist, die abgeschlossene Kugel $\overline{B_b}$ in $(C(I, \mathbb{R}^n), \|.\|_\infty)$, d.h.

$$K \;=\; \{\varphi \in C\,(I, \mathbb{R}^n)|\, \|\varphi\,(t) - x_0\| \leq b \;\; \forall t\}$$

Da K eine abgeschlossene Teilmenge im vollständigen metrischen Raum $(C(I, \mathbb{R}^n), d_\infty)$ ist, ist K selbst ein vollständiger metrischer Raum. Wir betrachten nun den Integraloperator

$$\begin{array}{rcl} H \;:\; K & \to & C(I, \mathbb{R}^n) \\ x & \mapsto & \left(H(x) : t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} F\,(x\,(s)\,, s)\, ds\right). \end{array}$$

Wegen der Wahl von $\sigma := \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ gilt $H : K \to K$, denn

$$\|H\varphi(t) - x_0\| = \| \int_{t_0}^{t} F(\varphi(s), s)\| \leq M\sigma \leq M\frac{b}{M} = b.$$

Ein Fixpunkt von H ist nun eine Lösung des AWP's, denn

$$x(t) = Hx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F\,(x\,(s)\,, s)\, ds \iff x'(t) = F(x(t), t), x(t_0) = x_0.$$

Weiter im Beweis: Ist L die Lipschitzkonstante von F, so ist H Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstanter $L\sigma$, denn

$$\|Hx(t) - Hy(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|F(x(s), s) - F(y(s), s)\| ds \leq L \int_{t_0}^{t} \|x(s) - y(s)\| ds \qquad (22)$$

und somit $\|Hx - Hy\|_\infty \leq L\sigma\|x - y\|_\infty$.

Um mittels des Banachschen Fixpunktsatzes einen Fixpunkt zu finden, muss H kontrahierend sein. Im allgemeinen ist H aber nicht kontrahierend Wir führen daher eine neue Norm ein, bzgl. der H kontrahierend ist. Dazu wählen wir ein $\alpha \in C(I, [r, s])$ und definieren die Norm auf $C(I, \mathbb{R})$

$$\|\varphi\|_\alpha := \max_{t \in I} \|\mathsf{e}^{\alpha(t)}\varphi\,(t)\,\|.$$

Diese ist äquivalent zu $\|.\|_\infty$, denn $e^r\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\alpha \leq e^s\|\varphi\|_\infty$. Damit ist $(C(I, \mathbb{R}^n), \|.\|_\alpha)$ ein Banachraum und $K \subset C(I, \mathbb{R}^n)$ abgeschlossen bezüglich $\|.\|_\alpha$. D.h. (K, d_α) ist ein vollständiger metrischer Raum.

Ende des Beweises: Wir wählen nun $\alpha(t) := -L|t - t_0|$, d.h. $\alpha \in C\left(I, [\mathsf{e}^{-L\sigma}, 1]\right)$. Multiplizieren wir nun die Ungleichung (22) mit $e^{\alpha(t)} = e^{-L|t-t_0|}$, so erhalten wir für alle $t \in I$

$$\begin{aligned} \left\|e^{\alpha(t)}\,(Hx\,(t) - Hy\,(t))\right\| &\leq Le^{\alpha(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s)} e^{\alpha(s)}\, \|x\,(s) - y\,(s)\|\, ds \\ &\leq Le^{-L|t-t_0|}\, \underbrace{\left| \int_{t_0}^{t} e^{L|s-t_0|} ds \right|}_{=\frac{1}{L}\left(e^{L|t-t_0|}-1\right)} \|x - y\|_\alpha \\ &\leq \left(1 - e^{-L\sigma}\right) \|x - y\|_\alpha \end{aligned}$$

D.h. aber, dass H kontrahierend ist bezüglich d_α:

$$\|Hx - Hy\|_\alpha \;\leq\; \underbrace{(1-e^{-L\sigma})}_{<1} \|x-y\|_\alpha$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz ist H konstant oder hat genau einen Fixpunkt $x \in K$ und somit genau eine Lösung x des Anfangswertproblems $x' = F(x,t)$ und $x(t_0) = x_0$ mit dem Definitionsbereich $I = [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$ und dem Bild $x(I) \subset \overline{B_b(x_0)})$. $\square$

Approximative Lösung des AWP's

Folgerung 105. *Unter den Voraussetzungen des Satzes von Picard–Lindelöf liefert der Banachsche Fixpunktsatz ein Verfahren zur Approximation der Lösung des Anfangswertproblems $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$: Sei*

$$\varphi_0(t) \equiv x_0, \qquad \varphi_1 := H\varphi_0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n := H\varphi_{n-1}, \; \ldots$$

iterativ definiert. Dann konvergiert φ_n gleichmäßig gegen die Lösung x des AWP's in $(C(I, \overline{B_b(x_0)}), \|.\|_\infty)$. Die Abschätzungen in jedem Schritt liefern

$$\|x(t) - \varphi_n(t)\| \;\leq\; \frac{M\;L^n}{(n+1)!}|t-t_0|^{n+1}.$$

Zum Beweis dieser Folgerung benutzt man den Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes und eine Induktion über n.

Lokale Version des Satzes von Picard–Lindelöf

Folgerung 106 (Picard–Lindelöf lokal)**.** *Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die lokal Lipschitz-stetig bzgl. x ist. Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung $(x_0, t_0) \in U$ ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige Lösung $\varphi_{x_0} : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ des AWP's $x' = F(x,t)$ mit $x(t_0) = x_0$.*

Beweis. Da F lokal Lipschitz-stetig ist, finden wir zu jedem $(x_0, t_0) \in U$ eine Umgebung V auf der F Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante L. Darin finden wir nun eine kompakte Menge $Q = \overline{B_\delta(x_0)} \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, so dass $\varepsilon \leq \delta/M$ und $L\varepsilon < 1$ (M wie im Beweis des Satzes).

Im Beweis des Satzes hatten wir gesehen, dass $L\varepsilon$ die Kontraktionskonstante für den Integraloperator H ist, d.h. dass H für dieses ε kontrahierend ist. $\square$

Eindeutigkeit der Lösung

Satz 107 (Eindeutigkeitssatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich x lokal Lipschitz-stetig. Seien $\varphi, \psi : I = (a,b) \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen von $x' = f(x,t)$ mit $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = x_0$ für ein $t_0 \in I$. Dann gilt $\varphi = \psi$.*

Beweis. Wir betrachten die Menge $D := \{t \in I \mid \varphi(t) = \psi(t)\}$. Dann ist

- D nicht leer, denn $t_0 \in D$,

- D ist abgeschlossen, denn φ und ψ sind stetig und $D = (\varphi - \psi)^{-1}(0)$.
- D ist offen in I: Sei dazu $t \in D$. Dann sind φ, ψ Lösungen des AWP's $x' = F(x,t)$, $x(t) = \varphi(t) = \psi(t)$. Nach Picard–Lindelöf lokal existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\varphi \equiv \psi$ auf $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset I$. Dann ist aber $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset D$. D.h. D ist offen in I.

Damit ist D nicht leer, offen und abgeschlossen im Intervall I.

Somit ist $D = I$. □

Fortsetzung zur maximalen Lösung

Definition 56. *Eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ des AWP's (*) $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$, heißt maximal, falls für jede andere Lösung $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ von (*) gilt, dass $J \subset I$.*

Folgerung 108 (Satz über die maximale Lösung)**.** *Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. x. Dann existiert zu jedem $(x_0, t_0) \in U$ genau eine maximale Lösung $\varphi_{x_0} : (a_{x_0}, b_{x_0}) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des AWP's $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$.*

Beweis. Sei $(x_0, t_0) \in U$. Wir definieren die folgenden Zahlen

$$\begin{aligned} a_{x_0} &:= \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \exists \text{Lsg. des AWP's } \varphi : (a,b) \to \mathbb{R}\} \\ b_{x_0} &:= \sup\{b \in \mathbb{R} \mid \exists \text{Lsg. des AWP's } \varphi : (a,b) \to \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

mit $a_{x_0} < x_0 < b_{x_0}$. Auf $I_{\max} := (a_{x_0}, b_{x_0}) \subset \mathbb{R}$ definieren wir die Abb.

$$\begin{array}{rcll} \varphi_{x_0} : I_{\max} & \to & \mathbb{R}^n & \\ t & \mapsto & \varphi(t), & \text{falls } t \in (a,b) \text{ und } \varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^n \text{ eine} \\ & & & \text{Lsg. des AWP's } x' = F(x,t),\ x(t_0) = x_0 \end{array}$$

Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes ist diese wohldefinert, da zwei auf einem Intervall gegebene Lösungen übereinstimmen. Alle Lösungen sind C^1–Abbildungen, und damit auch φ_{x_0}.

Des Weiteren löst φ_{x_0} das Anfangswertproblem $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$ auf dem gesamten (und maximal möglichen) Intervall (a_{x_0}, b_{x_0}). □

Globale Existenz- und Eindeutigkeit

Satz 109. *Sei $I = (a,b)$ mit $-\infty \le a < b \le \infty$ und $F : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig auf jeder Menge der Form $\mathbb{R}^n \times J$, wobei $J \subsetneq I$ ein kompaktes Intervall ist. Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times I$ eine eindeutige, auf ganz I definierte maximale Lösung $\varphi_{x_0} : I \to \mathbb{R}^n$ des AWP's $x' = F(x,t)$ mit $x(t_0) = x_0$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf: Sei $J \subset I$ ein kompaktes Intervall. Da $F : \mathbb{R}^n \times J \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig ist, ist der Integraloperator H aus dem Beweis eine Lipschitz-stetige Abbildung von $C(J, \mathbb{R}^n) \to C(J, \mathbb{R}^n)$. Wie im Beweis weist man dann nach, dass H kontrahierend ist (bzgl. der geänderten Norm). Somit erhält man für jedes kompakte $J \subset I$ eine eindeutige Lösung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ des AWP's. Diese kann man nun wie im Satz über die maximale Lösung zu einer Lösung auf I fortsetzen. □

Maximale Lösung des linearen AWP's

Folgerung 110 (Maximale Lösung des linearen AWP's)**.** *Sei $I = (a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times I$, $A : I \to Mat_n(\mathbb{R})$ und $\mathbf{b} : I \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen. Dann besitzt das lineare AWP*

$$x' = A(t)x + \mathbf{b}(t), \quad x(t_0) = x_0$$

genau eine maximale Lösung $\varphi_{x_0} : I \to \mathbb{R}^n$.

Beweis. $f(x, t) = A(t)x + \mathbf{b}(t)$ ist Lipschitz-stetig auf jeder Menge der Form $\mathbb{R}^n \times J$ mit einem kompakten Intervall $J \subsetneqq I$:

$$\|f(y, t) - f(x, t)\| = \|A(t)y - A(t)x\| = \|A(t)(y - x)\| \leq \max_{t \in J} \|A(t)\| \|y - x\|,$$

wobei $\|A\| = \max_{\xi \in \mathbb{R}^n, \|\xi\|=1} \|A\xi\|$. Die Lipschitz-Konstante ist $L := \max_{t \in J} \|A(t)\|$. Die Behauptung folgt dann aus dem vorhergehenden Satz. □

Existenzsatz von Cauchy und Peano

Zum Abschluss geben wir noch einen allgemeineren Existenzsatz an, ohne ihn zu beweisen. Die Voraussetzungen sind schwächer (Stetigkeit statt Lipschitz-Stetigkeit), dafür erhält man keine Eindeutigkeitsaussage.

Satz 111 (Existenzsatz von Cauchy und Peano)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Menge und $(x_0, t_0) \in U$. Die Abbildung $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sei stetig auf dem kompakten Bereich*

$$Q := \overline{B_b(x_0)} \times [t_0 - a, t_0 + a] \subset U.$$

Bezeichne wieder $M := \max_{(y,t) \in Q} \|F(y, t)\|$ und $\sigma := \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Dann hat das AWP $x' = F(x, t)$, $x(t_0) = x_0$ mindestens eine C^1-Lösung

$$x : [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

und diese erfüllt $\|x(t) - x_0\| \leq b$ für alle $t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$.

Für einen Beweis siehe H. Amann: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.*

Beispiel zur Mehrdeutigkeit der Lösung
Wir betrachten die stetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. durch $F(x) = \sqrt{|x|}$ und das AWP

$$x' = F(x) = \sqrt{|x|}, \quad x(t_0) = 0.$$

Wir haben gesehen, dass F nicht lokal Lipschitz-stetig ist, so dass wir nicht den Satz von Picard–Lindelöf anwenden können. Nach dem Satz von Peano gibt es jedoch mindestens eine Lösung, z.B. $x(t) \equiv 0$. Man findet jedoch unendlich viele weitere Lösungen, denn für jede Konstante $c \geq t_0$ ist

$$x_c(t) := \begin{cases} \frac{(t-c)^2}{4} & \text{für} \quad t \geq c \\ 0 & \text{für} \quad t \leq c \end{cases}$$

eine Lösung des AWP's (ÜA).

8.4 Abhängigkeit der Lösung von den AB'en

Abhängigkeit der Lösung von den AB'en

Wir wollen nun untersuchen, wie die Lösung von den Anfangswerten abhängt. Dazu benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 112 (Gronwall–Ungleichung)**.** *Seien $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ stetige, nichtnegative Funktionen und gelte*

$$v(t) \leq c + \int_a^t v(s)u(s)\,ds \quad \forall t \in [a,b],\ c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \text{ konstant.}$$

Dann gilt

$$v(t) \leq c \cdot e^{\int_a^t u(s)\,ds} \quad \forall t \in [a,b].$$

Beweis. 1. Fall: $c > 0$. Wir betrachten die Funktion

$$f(t) := c + \int_a^t v(s)u(s)\,ds \ > \ 0.$$

Es gilt $0 < c \leq f(t)$ und $v(t) \leq f(t)$ für alle $t \in [a,b]$. Dann gilt

$$f'(t) = v(t) \cdot u(t) \leq f(t) \cdot u(t) \quad \text{und deshalb} \quad (\ln f(t))' = \frac{f'(t)}{f(t)} \leq u(t).$$

Durch Integration erhält man

$$\ln(f(t)) - \ln(f(a)) \leq \int_a^t u(s)\,ds, \ \text{ also } \ f(t) \leq f(a) \cdot e^{\int_a^t u(s)\,ds}$$

Folglich ist $v(t) \leq f(t) \leq c \cdot e^{\int_a^t u(s)\,ds}$ mit $c = f(a)$.

2. Fall: $c = 0$. Hier ist zu zeigen, dass $v(t) \equiv 0$. Nach Voraussetzung ist

$$v(t) \leq \int_a^t v(s)u(s)\,ds \leq \varepsilon + \int_a^t v(s)u(s)\,ds \quad \forall t \in [a,b],\ \varepsilon > 0.$$

Nach dem 1. Fall folgt dann $0 \leq v(t) \leq \varepsilon \cdot e^{\int_a^t u(s)\,ds}\ \forall\, \varepsilon > 0$. Lassen wir ε gegen 0 laufen, so folgt $v(t) \equiv 0$. □

Stetige Abhängigkeit der Lösung von der AB

Satz 113. *Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auf U stetig und Lipschitz-stetig bzgl. x mit der Lipschitzkonstanten L. Seien (x_0, t_0), $(y_0, t_0) \in U$ und*

$$\varphi_{x_0}\ ,\ \varphi_{y_0} : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Lsg'en der DG $x' = F(x,t)$ mit den AB'en $\varphi_{x_0}(t) = x_0$ bzw. $\varphi_{y_0}(t) = y_0$. Dann gilt

$$\|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{y_0}(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| \cdot \mathrm{e}^{L|t-t_0|} \quad \forall\, t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]\,.$$

Folgerung 114 (Stetige Abhängigkeit der Lösung von der AB)**.** *Sei F wie im Satz und $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von AB'en, die gegen die AB x_0 konvergiert. Sei φ_{x_n} die Lösung des AWP's $x' = F(x,t),\ x(t_0) = x_n$. Dann konvergiert $\{\varphi_{x_n}\}$ gleichmäßig gegen φ_{x_0} auf jedem kompakten Intervall $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, auf dem alle Lösungen definiert sind.*

Beweis. $v(t) := \|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{y_0}(t)\|^2$ ist diff.-bar. Für $t_0 \leq t < t_0 + \varepsilon$ gilt:

$$\begin{aligned}
v(t) &= v(t_0) + \int_{t_0}^{t} v'(s)ds \\
&= v(t_0) + 2\int_{t_0}^{t} \langle \varphi_{x_0}(s) - \varphi_{y_0}(s), \varphi'_{x_0}(s) - \varphi'_{y_0}(s)\rangle\, ds \\
&\overset{\text{CS}-\text{U.}}{\leq} v(t_0) + 2\int_{t_0}^{t} \|\varphi_{x_0}(s) - \varphi_{y_0}(s)\| \cdot \|\varphi'_{x_0}(s) - \varphi'_{y_0}(s)\|\, ds \\
&= v(t_0) + 2\int_{t_0}^{t} \|\varphi_{x_0}(s) - \varphi_{y_0}(s)\|\|F(\varphi_{x_0}(s), s) - F(\varphi_{y_0}(s), s)\|ds \\
&\leq v(t_0) + 2L\int_{t_0}^{t} \underbrace{\|\varphi_{x_0}(s) - \varphi_{y_0}(s)\|^2}_{=v(s)}\, ds
\end{aligned}$$

Aus der Gronwall–Ungleichung für $u(s) \equiv 2L$ folgt dann

$$v(t) \leq v(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} 2L\,ds} = v(t_0) \cdot e^{2L(t-t_0)}.$$

Damit erhält man die Behauptung $\|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{y_0}(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| \cdot e^{L(t-t_0)}$ für alle $t_0 \leq t < t_0 + \varepsilon$. Analog geht man für $t_0 - \varepsilon < t \leq t_0$ vor. □

Beispiel zur Abhängigkeit der Lsg. von den AB's

Wir betrachten das folgende Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^2$:

$$V(x,y) := (-y, x) + (r^2(x,y) - 1)\,(x,y)\,,$$

wobei $r^2(x,y) := x^2 + y^2$. Wir suchen die Integralkurven von V durch einen Punkt $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$, $x_0 > 0$, d.h. wir müssen das autonome AWP

$$\gamma'_{x_0}(t) = V(\gamma_{x_0}(t)), \quad \gamma_{x_0}(0) = (x_0, 0) \tag{23}$$

lösen. Schreiben wir $\gamma_{x_0} = (x,y)$, so ist das AWP

$$\begin{aligned} x' &= -y + (r^2 - 1)x, \\ y' &= x + (r^2 - 1)y \end{aligned}\quad , \quad x(0) = x_0 \;\; y(0) = 0$$

zu lösen. Wir machen folgenden Ansatz für die Lösung γ_{x_0}:

$$\gamma_{x_0}(t) \;=\; h(t)(\cos(t), \sin(t))$$

für eine Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ mit $h(0) = x_0$.

Dann gilt $r^2(\gamma_{x_0}(t)) = h^2(t)$. Ist $\gamma_{x_0}(t) = h(t)(\cos(t), \sin(t))$ eine Integralkurve von V, so gilt

$$\begin{aligned}\gamma'_{x_0}(t) &= h'(t)(\cos(t), \sin(t)) + h(t)(-\sin(t), \cos(t)) \\ &\overset{(23)}{=} h(t)(-\sin(t), \cos(t)) + (h^2(t) - 1)h(t)(\cos(t), \sin(t))\end{aligned}$$

Also muss h das autonome AWP $h' = h(h^2 - 1), \quad h(0) = x_0$ erfüllen. Dies löst man mittels Trennung der Variablen und erhält

$$h(t) = \frac{\mathsf{e}^{-t}}{\sqrt{\mathsf{e}^{-2t} - \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)}}.$$

Ist nun $x_0 \le 1$, so ist $\left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right) \le 0$ und damit ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Ist dagegen $x_0 > 1$, so ist $0 < \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right) < 1$ und damit ist h nur definiert auf dem Intervall $I = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)\right) \subset \mathbb{R}$ um $t_0 = 0$.

Wir unterscheiden nun drei Fälle für die Integralkurven $\gamma_{x_0}(t) = h(t)(\cos(t), \sin(t))$:

- $\underline{x_0 = 1}$: Hier ist $h(t) \equiv 1$ und die Integralkurve ist ein Kreis.
- $\underline{0 < x_0 < 1}$: Hier sind die Integralkurven $\gamma_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ Spiralen, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Das Quadrat des Abstandes zum Nullpunkt $r^2(t) := r^2(\gamma_{x_0}(t))$ ist
$$r^2(t) = h^2(t) = \frac{\mathsf{e}^{-2t}}{\mathsf{e}^{-2t} - \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)} = \frac{1}{1 - \mathsf{e}^{2t}\left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)}$$
und erfüllt $r^2(t) \to_{t\to-\infty} 1$ und $r^2(t) \to_{t\to\infty} 0$. D.h. die Spiralen laufen für $t \to \infty$ in die Null und nähern sich für $t \to -\infty$ dem Einheitskreis an.
- $\underline{x_0 > 1}$: Die Integralkurven $\gamma_{x_0} : \left(-\infty, -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)\right) \to \mathbb{R}^2$ sind Spiralen, die sich für $t \to -\infty$ dem Einheitskreis annähern, und für $t \to -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)$ in endlicher Zeit gegen ∞ gehen.

8.5 Lineare Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^n$

Lineare Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^n$

Wir haben Lösungsmethoden für lineare Differentialgleichungen in $\mathbb{R}$ kennengelernt. In diesem Kapitel verallgemeinern wir diese und behandeln lineare Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^n$.

Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $-\infty \le a < b \le \infty$ und

$$A : I \longrightarrow Mat_n(\mathbb{R}), \quad b : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

stetige Abbildungen. Dann heißt

$$\begin{aligned}x' &= A(t)x && \textit{homogenes, lineares DGL System,} \\ x' &= A(t)x + b(t) && \textit{inhomog., lin. DGL System mit Störfkt. } b(t).\end{aligned}$$

(Ist speziell $A(t) \equiv A \in Mat_n(\mathbb{R})$, so sagt man, das System hat *konstante Koeffizienten*, s.o.).

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass es zu jeder AB der Form $x(t_0) = x_0$ mit $t_0 \in I$ genau eine maximale Lösung des linearen Systems gibt, die auf ganz I definiert ist.

Struktur des Lösungsraumes linearer Systeme

Satz 115 (Struktur des Lösungsraumes linearer Systeme)**.** *Die Menge V der maximalen Lösungen $x : I \to \mathbb{R}^n$ des linearen homogenen Systems (*) $x' = A(t)x$ ist ein n-dimensionaler reeller Vektorraum.*

Die Menge der maximalen Lösungen des linearen inhomogenen Systems (**) $x' = A(t)x + b(t)$ ist der affine Raum $\mathcal{A} = x_s + V$ wobei x_s eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung ist.

Beweis. Sind x_1 und x_2 zwei Lösungen von $(*)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ eine Lösung von $(*)$. Zu jedem Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert genau eine max. Lösung φ_{x_0}, d.h. die lineare Abb. $x_0 \to \varphi_{x_0}$ ist ein VR-Isomorphismus, und somit ist $\dim V = n$.

Sei $\mathcal{A}$ der Lösungsraum des inhom. lin. Systems $(**)$. Wir wissen, dass eine spezielle Lösung x_s der inhomogenen linearen DGL $(**)$ existiert. Außerdem gilt für jede andere Lösung $x \in \mathcal{A}$, dass $x - x_s \in V$ und für jede Lösung $y \in V$, dass $x_s + y \in \mathcal{A}$. Somit ist $\mathcal{A} = x_s + V$.

Fundamentalsystem und Fundamentalmatrix

Definition 116 (Fundamentalsystem und Fundamentalmatrix)**.** Sei $A : I \to Mat_n(\mathbb{R})$ stetig und (*) $x' = A(t)x$ ein homogenes lineares DGL-System.

- Eine Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des Lösungsraumes von (*) nennt man *Fundamentalsystem* zu (*).
- Die Matrix $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ aus den Spaltenvektoren φ_j heißt *Fundamentalmatrix* von (*).
- Seien $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ Lösungen von (*). Die Funktion $W := \det(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : I \to \mathbb{R}$ heißt *Wronski Determinante* von $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.
- Bilden $\varphi_j = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} e_i$ ein Fundamentalsystem mit $\varphi_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und e_i die kanonische Basis, dann ist die Fundamentalmatrix gegeben durch $\Phi = (\varphi_{ij})_{i,j=1}^{n}$.
- n Lösungen von (*) bilden ein Fundamentalsystem, genau dann, wenn ihre Wronski-Determinante für ein t nicht verschwindet.

Eigenschaften der Fundamentalmatrix

Sei Φ eine Fundamentalmatrix zu $(*)$. Dann gilt:

1. Eine Lösung des homogenen AWP's $x' = Ax$, $x(t_0) = x_0$ ist gegeben durch
$$\varphi(t) = \Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}x_0$$
2. Φ ist eine Lsg. des linearen homogenen System $X' = A \cdot X$ in $\mathbb{R}^{n^2}$.
3. Ist $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, d.h. S invertierbar, so ist $\Phi \cdot S$ ist auch eine Fundamentalmatrix.

Beweis. 1) $\varphi'(t) = \Phi'(t)(\Phi(t_0))^{-1}x_0 = A\Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}x_0 = A\varphi(t)$.
2) $\Phi' = (\varphi_1', \ldots, \varphi_n') = (A\varphi_1, \ldots, A\varphi_n) = A \cdot \Phi$.
3) $(\Phi \cdot S)' = \Phi' \cdot S = A \cdot \Phi \cdot S$. □

Beispiel
Sei ω eine Konstante. Wir betrachten das homogene lineare DG-System mit konstanten Koeffizienten
$$\begin{cases} x_1' &= -\omega x_2 \\ x_2' &= \omega x_1 \end{cases}, \quad d.h. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
Ein Fundamentalystem wird von den folgenden beiden Funktionen gebildet
$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \ \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$
Diese entsprechen den AB $\varphi_1(0) = e_1$ und $\varphi_2(0) = e_2$.

Zu einer beliebigen AB $x(0) = c_1e_1 + c_2e_2$ erhalten wir die Lösung $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$.

Die Fundamentalmatrix ist dann gegeben durch
$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Spezielle Lösungen des inhomogenen Systems

Wie im 1-dim. Fall erhält man spezielle Lsg'en der inhom. lin. DG $x' = A(t)x + b(t)$ aus einem Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen DG mittels Variation der Konstanten.

Satz 117 (Variation der Konstanten)**.** *Seien $A : I \to Mat_n(\mathbb{R})$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\Phi : I \to Mat_n(\mathbb{R})$ eine Fundamentalmatrix des linearen homogenen Systems $x' = A(t)x$. Dann ist*
$$\psi_s(t) := \Phi(t)u(t)$$
eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems $x' = A(t)x + b(t)$, wobei $u : I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\Phi(t)u'(t) = b(t)$, dh.
$$(*) \qquad u(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)ds + v$$
mit einem konstanten Vektor v. Gibt man zur inhomogenen DG die AB $x(t_0) = x_0$ vor, so ist $v := \Phi^{-1}(t_0)x_0$.

Beweis. Für $u(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + const$ wie in $(*)$ gilt dass $u'(t) = \Phi^{-1}(t)b(t)$ und damit $\Phi(t)u'(t) = b(t)$. Somit ist $\psi_s(t) = \Phi(t)u(t)$ eine Lösung:

$$\begin{aligned} \psi_s'(t) &= \Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u'(t) \\ &= A(t)\Phi(t)u(t) + b(t) \quad = \quad A(t)\psi_s(t) + b(t). \qquad \Box \end{aligned}$$

Bemerkung
Ist $v = (v_1, \dots, v_n) : I \to \mathbb{R}^n$ so ist mit $\int_{t_0}^t v(s)ds$ die folgende differenzierbare Abbildung gemeint

$$I \ni t \mapsto \int_{t_0}^t v(s)ds := \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t v_1(s)ds \\ \vdots \\ \int_{t_0}^t v_n(s)ds \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Beispiel
Wir betrachten das inhom. lin. DG-System mit konst. Koeffizienten

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = x_1 + t \end{cases}, \quad d.h. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}}_{=b(t)}$$

Wir müssen nun folgendes tun, um eine spezielle Lösung zu erhalten:

1) Bestimmen der Fundamentalmatrix (bereits erledigt, s.o.):

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

2) Invertieren von Φ, $\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$, und damit

$$\Phi(t)^{-1}b(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\sin(t) \\ t\cos(t) \end{pmatrix}.$$

3) Integrieren von

$$u(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds = \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} s\sin(s) \\ s\cos(s) \end{pmatrix} ds$$

Dies berechnen wir mit partieller Integration und erhalten

$$\begin{aligned} \int t\sin(t)dt &= -t\cos(t) + \sin(t) \\ \int t\cos(t)dt &= t\sin(t) + \cos(t) \end{aligned}$$

und damit $u(t) = \begin{pmatrix} -t\cos(t) + \sin(t) \\ t\sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\psi_s(t) = \Phi(t)u(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t\cos t + \sin t \\ t\sin t + \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems.

Homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wie bestimmt man nun eine Fundamentalsystem eines homog. lin. DG-Systems $x' = A(t)x$? Wir betrachen nun den Spezialfall $A(t) \equiv A \in Mat_n(\mathbb{R})$ konstant. Analog zu $n = 1$ definiert man:

Definition 118 (Matrixexponential)**.** Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$. Die Matrix $\mathsf{e}^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ heißt Exponential von A.

Dies ist wohl-definiert, d.h. diese Reihe konvergiert: Da $(Mat_n(\mathbb{R}), \|.\|)$ ein vollständiger normierter Raum ist, genügt es zu zeigen, dass die Folge der Partialsummen $S_m := \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}$ eine Cauchy-Folge ist. Es ist aber

$$\|S_m - S_{\ell-1}\| = \|\sum_{k=\ell}^{m} \frac{A^k}{k!}\| \leq \sum_{k=\ell}^{m} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=\ell}^{m} \frac{\|A\|^k}{k!} \to_{m,\ell\to\infty} 0,$$

denn $\mathsf{e}^{\|A\|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$ konvergiert. Dabei gilt die zweite Ungleichung wegen $\|AB\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\| \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\|\|B\|$. Daran sehen wir auch, dass die Reihe e^A absolut konvergiert.

Lemma 119. *Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ und $\Phi : \mathbb{R} \to Mat_n(\mathbb{R})$, $\Phi(t) := \mathsf{e}^{tA}$. Es sei $\Phi_m : \mathbb{R} \to Mat_n(\mathbb{R})$ die Folge von Abildungen definiert durch $\Phi_m(t) := \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k A^k}{k!}$. Dann konvergiert Φ_m auf jedem kompakten Intervall $K \subset \mathbb{R}$* gleichmäßig *gegen Φ. Insbesondere ist Φ stetig auf $\mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $M := max\{|a|, |b|\} \cdot \|A\|$. Die konvergente Reihe $\mathsf{e}^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$ ist eine Majorante für die Exponentialreihe der Beträge $\mathsf{e}^{\|tA\|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|tA\|^k}{k!}$. Nach dem Cauchy-Kriterium finden wir zu $\varepsilon > 0$ ein n_ε, so dass $\frac{M^m}{m!} + \ldots + \frac{M^l}{l!} < \varepsilon$ für alle $m \geq \ell \geq n_\varepsilon$. Somit gilt für alle $t \in K$ und $m \geq \ell \geq n_\varepsilon$, dass

$$\|\Phi_m(t) - \Phi_{\ell-1}(t)\| \leq \sum_{k=l}^{m} \frac{|t|^k\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=\ell}^{m} \frac{|t|^k\|A\|^k}{k!} \leq \sum_{k=\ell}^{m} \frac{M^k}{k!} \leq \varepsilon.$$

D.h., sowohl Φ_m als auch die Exponentialreihe der Beträge sind Cauchyfolgen in vollständigen metrischen Räumen und somit gleichmäßig konvergent auf K. Damit ist der Grenzwert Φ stetig auf allen kompakten Intervallen, und damit auch auf ganz $\mathbb{R}$. $\square$

Die Lsg. der homogenen DG mit konstanten Koeffizienten

Satz 120. *Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$. Dann ist die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \ni t \mapsto \mathsf{e}^{tA} \in Mat_n(\mathbb{R})$ eine Fundamentalmatrix zu $x' = Ax$.*

Insbesondere ist zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}^n$, die differenzierbare Abbildung $\varphi_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, definiert durch $\varphi_{x_0}(t) = \mathsf{e}^{(t-t_0)A} \cdot x_0$, die Lösung des AWP's $x' = Ax$, $x(t_0) = x_0$.

Beweis. Da A konstant ist, sind die Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ der AWP'e $x' = Ax$, mit AB'en $x(0) = e_i$, $i = 1, \ldots, n$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Sei $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ die dazugehörige Fundamentalmatrix.

Nach der Iteration von Picard-Lindelöf wird jede dieser Lösungen φ_i auf kompakten Intervallen gleichmäßig approximiert durch Funktionen φ_{im} die sich durch iteratives Anwenden des Integraloperators H ergeben, d.h.

$$\varphi_{i0}(t) \equiv e_i, \ \varphi_{i1}(t) = e_i + \int_0^t Ax_0 ds, \ \varphi_{im}(t) = e_i + \int_0^t A\varphi_{i\,m-1}(s)ds$$

Schreibt man Φ_m für die Matrix mit den Spalten $(\varphi_{1m}, \dots, \varphi_{nm})$, so ist

$$\begin{aligned}
\Phi_0(t) &\equiv \mathbf{1}_n \\
\Phi_1(t) &= H\Phi_0(t) \ = \ \mathbf{1}_n + \int_0^t Ads \ = \ \mathbf{1}_n + tA \\
\Phi_2(t) &= H\Phi_1(t) \ = \ \mathbf{1}_n + \int_0^t A(\mathbf{1}_n + sA)ds \ = \ \mathbf{1}_n + tA + \tfrac{t^2A^2}{2} \\
&\vdots \\
\Phi_m(t) &= H\Phi_{m-1}(t) \ = \ \mathbf{1}_n + \int_0^t A\Big(\sum_{k=0}^{m-1} \tfrac{s^kA^k}{k!}\Big)ds \ = \ \sum_{k=0}^{m} \tfrac{t^kA^k}{k!}
\end{aligned}$$

Wir haben aber gesehen, dass die Folge von Abbildungen $\Phi_m : t \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{t^kA^k}{k!}$ auf jedem kompakten Intervall gleichmäßig gegen $\Phi(t) = \mathsf{e}^{tA}$ konvergiert. Da die kompakten Intervalle beliebig groß sein können, erhält man dass $\Phi : \mathbb{R} \to Mat_n(\mathbb{R})$ die Fundamentalmatrix von $x' = Ax$ ist. Damit ist Φ diffbar und $\varphi(t) = \Phi(t)x_0$ die Lsg. des AWP's $x(0) = x_0$. Dass $\psi(t) = \Phi(t - t_0)x_0$ eine Lsg. des AWP's $x(t_0) = x_0$ ist, folgt aus der Kettenregel. $\square$

Beispiel
Wir betrachten wieder die homog. lin. DG mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h. } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann rechnet man nach, dass $A^{2k+1} = (-1)^k A$ und $A^{2k} = (-1)^k \mathbf{1}_2$. Somit können wir das Exponential e^{tA} bestimmen:

$$\begin{aligned}
\mathsf{e}^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{t^{2k}A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{t^{2k+1}A^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{t^{2k}}{(2k)!}\right) \mathbf{1}_n + \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) A \\
&= (\cos t)\mathbf{1}_2 + (\sin t)A \ = \ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Folgerung 121 (Exponentialabbildung)**.** *Für $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ ist die Abbildung $\Phi : (\mathbb{R}, +) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\Phi(t) = \mathsf{e}^{tA}$ ein differenzierbarer Gruppenmorphismus zwischen der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ und der Gruppe der invertierbaren Matrizen $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Insbesondere ist $\mathsf{e}^{(t+s)A} = \mathsf{e}^{tA} \cdot \mathsf{e}^{sA} = \mathsf{e}^{sA} \cdot \mathsf{e}^{tA}$ und $(\mathsf{e}^{tA})^{-1} = \mathsf{e}^{-tA}$*

Beweis. Seien $s \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig und seien φ und ψ Lösungen des AWP's $x' = Ax$ mit den jeweiligen AB'en $x(s) = x$ und $x(0) = x$. Nach dem vorherigen Satz gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass $\varphi(t) = \mathsf{e}^{(t-s)A}x = \psi(t-s)$. Somit erhalten wir mit Eigenschaften der Fundamentalmatrix, dass

$$\Phi(t)\Phi(s)^{-1}x = \varphi(t) \ = \ \psi(t-s) = \Phi(t-s)\Phi(0)^{-1}x = \Phi(t-s)x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Damit erhalten wir für alle $t, s \in \mathbb{R}$, dass

$$(*) \qquad \Phi(t)\Phi(s)^{-1} = \Phi(t-s).$$

Dies impliziert aber die Behauptung

$$\Phi(t+s) = \Phi(t+s)\Phi(s)^{-1}\Phi(s) \overset{(*)}{=} \Phi(t)\Phi(s).$$

□

Folgerung 122 (Weitere Eigenschaften der Exponentialabbildung)**.** *Seien $A, B \in Mat_n(\mathbb{R})$.*

1. *Ist $AB = BA$, dann gilt $A\mathsf{e}^B = \mathsf{e}^B A$ und $\mathsf{e}^{A+B} = \mathsf{e}^A \cdot \mathsf{e}^B$.*
2. *Ist $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, so ist $\mathsf{e}^{BAB^{-1}} = B\mathsf{e}^A B^{-1}$.*

Beweis. Alle Aussagen folgen aus der Eindeutigkeit der Lsg. eines AWP's. Sei z.B. $X(t) = A\mathsf{e}^{tB}$ und $Y(t) = \mathsf{e}^{tB}A$. Dann gilt $X(0) = Y(0) = A$ und

$$X'(t) = AB\mathsf{e}^{tB} = BA\mathsf{e}^{tB} = BX(t) \ \text{ sowie } \ Y'(t) = B\mathsf{e}^{tB}A = BY(t).$$

Aus der Eindeutigkeit der Lsg. des AWP's $X' = BX$, $X(0) = A$ folgt dann $X(t) = Y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Sei weiter $U(t) := \mathsf{e}^{t(A+B)}$ und $V(t) = \mathsf{e}^{tA} \cdot \mathsf{e}^{tB}$. Dann gilt $U(0) = V(0) = \mathbf{1}_n$ und wegen der ersten Eigenschaft

$$U'(t) = (A+B)U(t) \ \text{ sowie } \ V'(t) = A\mathsf{e}^{tA}\mathsf{e}^{tB} + \mathsf{e}^{tA}B\mathsf{e}^{tB} = (A+B)V(t)$$

und somit $U(t) = V(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Die verbleibende Aussage beweist man analog. □

Zusammenfassung: Lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten
Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

1. Die eindeutige Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des homogenen AWPs $x' = Ax$ mit der AB $x(t_0) = x_0$ ist gegeben durch $\varphi(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$.

2. Die eindeutige Lösung $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des inhomogenen AWP's $x' = Ax + b(t)$ mit der AB $x(t_0) = x_0$ ist gegeben durch

$$\psi(t) = \mathsf{e}^{tA}\Big(\int_{t_0}^{t} \mathsf{e}^{-sA}b(s)ds + \mathsf{e}^{-t_0 A}x_0\Big) = \mathsf{e}^{(t-t_0)A}x_0 + \mathsf{e}^{tA}\int_{t_0}^{t} \mathsf{e}^{-sA}b(s)ds.$$

(Siehe Satz über die Variation der Konstanten.)

3. Ist $b(t) \equiv b$ auch konstant, kann man das Integral sofort berechnen, falls A invertierbar ist. Dann ist $\int_{t_0}^t \mathsf{e}^{-sA} b ds = -A^{-1}\mathsf{e}^{-sA}b|_{t_0}^t$ und somit $\psi(t) = \mathsf{e}^{(t-t_0)A}x_0 + A^{-1}(\mathsf{e}^{(t-t_0)A}b - b)$, denn A und damit auch A^{-1} kommutieren mit e^{tA}.

   Beachte, dass $-A^{-1}b$ eine (konstante) Lsg. von $y' = Ay + b$ ist.

Beispiel: Lineare Systeme mit diagonalisierbarem A
Sei nun A diagonalisierbar und $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A: $Av_i = \lambda_i v_i$. Dann sind v_i auch Eigenvektoren von e^A zu den Eigenwerten e^{λ_i}.

1. Setzen wir $\varphi_i(t) := e^{\lambda_i(t-t_0)}v_i$, dann bilden die $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Basis des Lösungsraums des homogenen Systems $x' = Ax$. Daher ist $\varphi_{x_0}(t) := \sum_{i=1}^n (x_0)_i \varphi_i(t)$ die Lsg. zur AB $x(t_0) = x_0 =: \sum_{i=1}^n (x_0)_i v_i$.

2. Eine spezielle Lsg. des inhomogenen Systems $x' = Ax + b$ mit konstantem b erhalten wir für $t_0 = 0$ und $x_0 = 0$:

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^n b_i \mathsf{e}^{\lambda_i t}\Big(\int_0^t \mathsf{e}^{-s\lambda_i} ds\Big) v_i = \sum_{i=1}^n c_i(t) v_i$$

   wobei $c_i(t) := \begin{cases} \frac{b_i}{\lambda_i}(\mathsf{e}^{\lambda_i t} - 1), \text{ falls } \lambda_i \neq 0 \\ b_i\, t, \text{ falls } \lambda_i = 0, \end{cases}$ und $b = \sum_{i=1}^n b_i v_i$.

Aber: Nicht jede quadratische Matrix ist diagonalisierbar.

Lineare Systeme in Jordanscher Normalform

Wir wollen nun die *Jordansche Normalform* von Matrizen benutzen, um lineare Systeme in möglichst einfacher Form zu schreiben. Einem Basiswechsel entspricht dann eine Substitution:

Lemma 123. *Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\tilde{A} = S^{-1}AS$.*
φ ist eine Lsg. von $x' = Ax \iff \psi = S^{-1}\varphi$ ist eine Lsg. von $y' = \tilde{A}y$.
Φ ist eine Fundamentallsg. von $x' = Ax \iff S^{-1}\Phi S$ (und damit auch $S^{-1}\Phi$) ist eine Fundamentallsg. von $y' = \tilde{A}y$.

Beweis. Da S eine konstante invertierbare Matrix ist, erhält man

$$(S^{-1}\varphi)'(t) = S^{-1}\varphi'(t) = S^{-1}A\varphi(t) = (S^{-1}AS)S^{-1}\varphi(t),$$

d.h. $S^{-1}\varphi$ ist eine Lsg. von $y' = \tilde{A}y$.
Damit ist $S^{-1}\Phi$, und somit auch $S^{-1}\Phi S$ eine FL von $y' = \tilde{A}y$.
(Den letzten Punkt sieht man auch an $\mathsf{e}^{tS^{-1}AS} = S^{-1}\mathsf{e}^{tA}S$.) □

Folgerung 124. *Sei $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ diagonalisierbar, d.h. $S^{-1}AS = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dann ist $\Phi(t) = S\, diag(\mathsf{e}^{\lambda_1 t}, \dots, \mathsf{e}^{\lambda_n t})$ eine Fundamentalmatrix von $x' = Ax$.*

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. A ist symmetrisch und damit diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 2$, d.h. EW'e sind $\pm\sqrt{2}$ zu den EV'en $v_1 = e_1 + (\sqrt{2} - 1)e_2$ und $v_2 = e_1 - (\sqrt{2} + 1)e_2$.

Nun bilden die Spalten v_1, v_2 die Matrix $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} - 1 & -(\sqrt{2} + 1) \end{pmatrix}$ und es ist $\det S = -2\sqrt{2}$, $S^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & 1 \\ \sqrt{2} - 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Somit ist $S \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\sqrt{2}} & \mathrm{e}^{-t\sqrt{2}} \\ (\sqrt{2} - 1)\mathrm{e}^{t\sqrt{2}} & -(\sqrt{2} + 1)\mathrm{e}^{-t\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ eine Fundamentalmatrix von $x' = Ax$.

Satz 125 (Jordansche Normalform)**.** *Sei $A \in Mat_n(\mathbb{C})$. Dann existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, so dass*

$$\widetilde{A} \; := \; SAS^{-1} \; = \; \mathrm{diag}(J_{m_1}(\lambda_1), \cdots, J_{m_k}(\lambda_k)),$$

wobei

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in Mat_m(\mathbb{C})$$

Hierbei sind λ_i die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte von A.

(Die Matrizen $J_m(\lambda)$ heißen Jordanblöcke.)

Der **Beweis** beruht auf dem Hauptsatz der Algebra, nach dem das charakteristische Polynom von A mindestens eine komplexe Nullstelle hat. Somit hat A mindestents einen Eigenwert.

Satz 126 (Reelle Jordansche Normalform)**.** *Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Dann existiert $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, so dass $\widetilde{A} = SAS^{-1}$ folgende Gestalt hat*

$$\widetilde{A} = \mathrm{diag}(J_{\ell_1}(\lambda_1), \cdots, J_{\ell_r}(\lambda_r), J_{2m_1}(\alpha_1, \beta_1), \cdots, J_{2m_s}(\alpha_s, \beta_s)),$$

$$J_{2m}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} J_m(\alpha) & -\beta \mathbf{1}_m \\ \beta \mathbf{1}_m & J_m(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{R})$$

Hierbei sind λ_i die (nicht notw. verschiedenen) reellen Eigenwerte von A, sowie $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ und $\overline{\mu}_j = \alpha_j - i\beta_j$, mit $\beta_j > 0$, die (nicht notw. versch.) nicht reellen Eigenwertepaare von A.[1]

Für einen **Beweis** siehe z.B. Klingenberg, *Lineare Algebra und Geometrie*: Wende Jordansche Normalform auf $A \in Mat_n(\mathbb{C})$ an. Für reelle EW'e erhält man Jordanblöcke. Ist μ ein nicht reeller EW von A, so auch $\overline{\mu}$, denn A ist reell. $\square$

[1] Die Multiplizität eines reellen Eigenwerts λ (bzw. eines imaginären Eigenwerts μ) ist dabei also $\sum_{\lambda_i = \lambda} \ell_i$ (bzw. $\sum_{\mu_j = \mu} m_j$).

Anwendung auf lineare DG'n

Sei $x' = Ax$ ein lineares DG-System mit konstanten Koeffizienten.

Sei $\tilde{A} = S^{-1}AS$ in Jordanscher Normalform, d.h. die Fundamentalmatrix von $x' = Ax$ ist gegeben durch $\mathsf{e}^A = S\mathsf{e}^{t\tilde{A}}S^{-1}$.

Sei nun $\tilde{A} = A_1 + \ldots + A_k$ wobei die A_i jeweils nur einen Jordanblock oder nur eine Matrix der Form $J_{2m}(\alpha, \beta)$ enthalten, und sonst nur Nullen.

Dann kommutieren die A_i miteinander und wir haben

$$\mathsf{e}^{t\tilde{A}} = \mathsf{e}^{t(A_1+\ldots+A_k)} = \mathsf{e}^{tA_1} \cdot \ldots \cdot \mathsf{e}^{tA_k}.$$

D.h., um die Fundamentalmatrix von $x' = Ax$ zu bestimmen, müssen wir S kennen und e^{tB} für die Fälle 1) $B = J_n(\lambda)$ und 2) $B = J_{2m}(\alpha, \beta)$ bestimmen.

1) $\underline{B = J_n(\lambda) = \lambda \mathbf{1}_n + J_n(0)}$: Da $J_n(0)$ und $\lambda\mathbf{1}_n$ miteinander kommutieren, ist $\mathsf{e}^{tB} = \mathsf{e}^{t\lambda} \cdot \mathsf{e}^{tJ_n(0)}$. Wir müssen also nur noch $\mathsf{e}^{tJ_n(0)}$ berechnen: Berechnet man die Potenzen von $\mathsf{e}^{tJ_n(0)}$, so erhält man

$$\mathsf{e}^{tB} = \mathsf{e}^{t\lambda} \cdot \mathsf{e}^{tJ_n(0)} = \mathsf{e}^{t\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ldots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & t \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D.h., eine Lsg. von $x' = Bx$ mit der AB $x(0) = x_0 = \sum_{i=1}^n c_i e_i$ ist gegeben durch

$$\mathsf{e}^{tB}x_0 = \mathsf{e}^{t\lambda} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t + c_3\frac{t^2}{2} + \ldots + c_n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ c_2 + c_3 t + \ldots + c_n\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \mathsf{e}^{t\lambda} \begin{pmatrix} p(t) \\ p'(t) \\ \vdots \\ p^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

wobei $p(t) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}$ Polynome vom Grad n sind.

2) $\underline{B = J_{2m}(\alpha, \beta)} = \begin{pmatrix} J_m(\alpha) & -\beta\mathbf{1}_m \\ \beta\mathbf{1}_m & J_m(\alpha) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{1}_m & 0 \\ 0 & \alpha\mathbf{1}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta\mathbf{1}_m \\ \beta\mathbf{1}_m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_m(0) & 0 \\ 0 & J_m(0) \end{pmatrix}$$

Da alle drei Summanden miteinander kommutieren erhält man wieder

$$\mathsf{e}^{tB} = \mathsf{e}^{t\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta t)\mathbf{1}_m & -\sin(\beta t)\mathbf{1}_m \\ \sin(\beta t)\mathbf{1}_m & \cos(\beta t)\mathbf{1}_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathsf{e}^{tJ_m(0)} & 0 \\ 0 & \mathsf{e}^{tJ_m(0)} \end{pmatrix}.$$

Eine allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$\varphi(t) = \mathsf{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) \begin{pmatrix} p(t) \\ \vdots \\ p^{(m-1)}(t) \\ q(t) \\ \vdots \\ q^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} + \mathsf{e}^{\alpha t}\sin(\beta t) \begin{pmatrix} -q(t) \\ \vdots \\ -q^{(m-1)}(t) \\ p(t) \\ \vdots \\ p^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

mit beliebigen Polynomen p, q vom Grad $\leq m-1$, deren Koeffizienten durch die AB'en bestimmt werden.

8.6 Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wir wollen nun die Ergebnisse aus den vorherigen Abschnitten auf DG'en höherer Ordnung anwenden.

Erinnerung: Wir können eine DG n-ter Ordnung $x^{(n)} = f(x, x', \ldots, x^{(n-1)}, t)$, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ein System erster Ordnung zu reduzieren. Jetzt bezeichnen wir $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,

$$F(y_1, \ldots, y_n, t) := (y_2, \ldots, y_n, f(y_1, \ldots, y_n, t));$$

und es ist $x : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des AWP's n-ter Ordnung $x^{(n)} = f(x, \ldots, x^{(n-1)}, t)$ mit AB'en $x(t_0) = a_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = a_n$, genau dann, wenn $y := \big(x, x', \ldots, x^{(n-1)}\big) : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des AWP's $y' = F(y, t)$, $y(t_0) = (a_1, \ldots, a_n)$ erster Ordnung ist. D.h.

$$\begin{array}{rcrcl} & & y_1'(t) & = & y_2(t) \\ y_2'(t) & = & y_1''(t) & = & y_3(t) \\ & & & \vdots & \\ y_{n-1}'(t) & = & y_1^{(n-1)}(t) & = & y_n(t) \\ y_n'(t) & = & y_1^{(n)}(t) & = & f(y_1, \ldots, y_n, t) \end{array}$$

Da aus der Lipschitz-Stetigkeit von f bezüglich $(x_1, \ldots, x_n)$ die von $(x_1, \ldots, x_n, t) \mapsto F(x_1, \ldots, x_n, t) = (x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n, t))$ folgt, übertragen sich alle Existenz- und Eindeutgkeitssätze auf DG'en höherer Ordnung. Folgende Aussagen gelten für das AWP n-ter Ordnung

$$\left.\begin{array}{rcl} x^{(n)} & = & f(x, x', \ldots, x^{(n-1)}, t) \\ & & x(t_0) = a_1,\ x'(t_0) = a_2,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = a_n \end{array}\right\} (*)$$

Folgerung 127 (Maximale Existenz- und Eindeutigkeit). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sei stetig und bezüglich $(x_1, \ldots, x_n)$ Lipschitz-stetig. Dann existiert zu jedem $(x_0, t_0) = (a_1, \ldots, a_n, t_0) \in \Omega$ genau eine maximale Lsg. $\varphi : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ des AWP's $(*)$.*

Folgerung 128 (Globale Existenz- und Eindeutigkeit). *Sei $I = (a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig bezüglich $(x_1, \ldots, x_n)$ auf jeder Menge der Form $\mathbb{R}^n \times J$, wobei $J \subsetneqq I$ ein kompaktes Intervall ist. Dann existiert genau eine auf ganz I definierte maximale Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ des AWP's $(*)$.*

Definition 57 (die lineare DG höherer Ordnung). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $b, a_k : I \to \mathbb{R}$, für $k = 0, \ldots, n-1$ stetig.*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \tag{24}$$

heißt lineare DG n-ter Ordnung. Ist $b(t) \equiv 0$, heißt (24) homogen, sonst inhomogen.

Folgerung 129 (Maximale Lösung des linearen AWP's n-ter Ordnung)**.** *Sei $I = (a,b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times I$, und $b, a_k : I \to \mathbb{R}$, für $k = 0, 1, \ldots, n-1$, seien stetige Funktionen. Dann besitzt das lineare AWP zu* (24) *genau eine maximale Lösung $\varphi_{x_0} : I \to \mathbb{R}^n$.*

Folgerung 130 (Struktur des Lösungsraumes)**.** *Die maximalen Lösungen der homogenen DG n-ter Ordnung bilden einen n-dimensionalen Vektorraum L. Die maximalen Lösungen der inhomogenen DG n-ter Ordnung bilden einen n-dimensionalen affinen Raum $L + \psi$, wobei ψ eine spezielle Lsg. der inhomogenen DG ist.*

Überführen wir nun die lineare DG n-ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

in ein System erster Ordnung, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ b(t) - a_{n-1}(t)y_n - \ldots - a_1(t)y_2 - a_0(t)y_1 \end{pmatrix}$$

und damit das lineare System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}}_{=:A(t)} \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \tag{25}$$

Definition und Bemerkungen

Eine Basis $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$, des Lösungsraumes der homog. lin. DG n-ter Ordnung $(*)$ $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$ heißt *Fundamentalsystem* von $(*)$. Die Fundamentalmatrix Φ des dazugehörigen linearen Systems erster Ordnung,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \ldots & \varphi_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}(t),$$

heißt *Fundamentalmatrix* von $(*)$.

Seien $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$ beliebige $(n-1)$-mal differenzierbare Funktionen, dann heißt $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) := \det \left(\varphi_i^{(j-1)}\right)_{1 \leq i,j=1 \leq n}$ *Wronski-Determinante* von $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Ist nun $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein Fundamentalsystem $(*)$, so ist die Wronski-Determinante von $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ gleich der Wronski-Determinante des Fundamentalsystems des zughörigen linearen Systems.

Aus der Variation der Konstanten für lineare Systeme erhalten wir, dass eine Lösung des inhomogenen Systems (24) gegeben ist durch

$$(\psi(t), \ldots, \psi(t)^{(n-1)})^T = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) \underbrace{(0, \ldots, 0, b(s))^T}_{\mathbf{b}} ds,$$

wobei Φ eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems ist. Mittels der Cramerschen Regel lässt sich $\Phi^{-1}\mathbf{b}$ ausdrücken, und mit Laplacescher Entwicklung (nach der Spalte $\mathbf{b}$ enthaltenden Spalte) erhalten wir:

Satz 131 (Variation der Konstanten)**.** *Sei $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein Fundamentalsystem der homog. DG n-ter Ordnung. Dann ist eine spezielle Lösung der inhomogenen DG* (24) *gegeben durch*

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+n} \varphi_k(t) \cdot \int_{t_0}^{t} b(s) \frac{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \ldots \varphi_n)(s)}{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(s)} ds. \tag{26}$$

Variation der Konstanten

1. Für $n = 2$ sieht diese Formel so aus
$$\psi(t) = -\varphi_1 \int_{t_0}^{t} \tfrac{b\varphi_2}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2} ds + \varphi_2 \int_{t_0}^{t} \tfrac{b\varphi_1}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2} ds.$$

2. Die spezielle Lösung (26) kann auch mittels der Variation der Konstanten ermittelt werden: Dazu machen wir den Ansatz $\psi(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(t) c_k(t)$ und bestimmen die $c_k(t)$ so, dass ψ die inhomog. DGL (24) löst. Dann erhält man das folgende lineare Gleichungssystem an die $c_k'(t)$
$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(t) \begin{pmatrix} \varphi_k(t) \\ \vdots \\ \varphi_k^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$
Integration liefert dann die Funktionen $c_k(t)$.

Lineare DG n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir wollen nun das Fundamentalsystem einer linearen DG n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten finden.

Definition 58 (Charakteristisches Polynom)**.** *Das charakteristisches Polynom der linearen homogenen DG n-ter Ordnung*

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + a_{n-2}x^{(n-2)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0 \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ist das Polynom

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

Ist $P \in \mathbb{R}[\lambda]$ ein Polynom in einer Variablen, dann ist $P(\lambda)$ das charakteristische Polynom zur DG $P(\frac{d}{dt})x := a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0$

Wir hatten gesehen, dass Die DG n-ter Ordnung $x^{(n)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0$ äquivalent ist zu einem System $y' = Ay$ mit A wie in (25).

Daran sieht man, dass das charakteristische Polynom der DG gleich dem charakteristischen Polynom $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}_n)$ von A ist: Entwickelt man nach der letzten Zeile, so erhält man

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda) &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0(t) & \dots & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{n+1}(-a_0) + (-1)^{n+2}(-a_1)(-\lambda) + \dots \\
&\quad + (-1)^{2n-1}(-a_{n-2})(-\lambda)^{n-2} + (-1)^{2n}(-a_{n-1}-\lambda)(-\lambda)^{n-1} \\
&= (-1)^n \left(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n\right)
\end{aligned}$$

Also sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der DG gleich den Eigenwerten von A. Und diese brauchen wir, um ein Fundamentalsystem zu bestimmen.

Satz 132 (Lineare DG n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten)**.** *Sei $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbb{R}[\lambda]$ das charakteristische Polynom zur homogenen linearen DG*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0. \qquad (*)$$

Seien λ_j die reellen und $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ sowie $\overline{\mu}_k$ die nicht reellen Nullstellen von P mit den zugehörigen Multiplizitäten ℓ_j, m_k, wobei $j = 1, \dots, r$ und $k = 1, \dots, s$. Dann bilden die reellen Funktionen

$$\begin{aligned}
\varphi_{j\ell}(t) &= e^{\lambda_j t} \cdot t^\ell && \forall\, j = 1, \dots, r,\ \ell = 0, \dots, \ell_j - 1 \\
\left.\begin{aligned}\psi_{km}(t) &= e^{\alpha_k t} \cdot \cos(\beta_k t) \cdot t^m \\ \tilde{\psi}_{km}(t) &= e^{\alpha_k t} \cdot \sin(\beta_k t) \cdot t^m\end{aligned}\right\} & && \forall\, k = 1, \dots, s,\ m = 0, \dots, m_k - 1.
\end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem von $(*)$.

Beweis. Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+s}$ die verschiedenen (und nicht zueinander konjugierten), komplexen Nullstellen von $P(\lambda)$ mit den zugehörigen Vielfachheiten ℓ_j. Es gilt:

Lemma 133. *Besitzt ein Polyonom $P(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ den Faktor $(\lambda - \lambda_j)^{\ell_j}$ und ist $\ell < \ell_j$, so gilt $P(\frac{d}{dt})\mathrm{e}^{\lambda_j t} t^\ell = 0$.*

Beweis. ÜA. □

Aufgrund des Lemmas erhält man, dass die Funktionen $\varphi_{j\ell} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\varphi_{j\ell}(t) = e^{\lambda_j t} \cdot t^\ell \qquad \forall\, j = 1, \dots, r,\ \ell = 0, \dots, \ell_j - 1 \qquad (**)$$

komplexe Lösungen der DG $x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)} \ldots + a_0 x(t) = 0$ sind.

Aus (**) folgt also, dass die Funktionen $\varphi_{j\ell}(t) = e^{\lambda_j t} \cdot t^\ell$ für die reellen Eigenwerte λ_j Lösungen sind. Für die echt komplexen Eigenwerte $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ erhält man aus (**), dass sowohl Realteil als auch Imaginärteil von $\varphi_{km}(t) = e^{\mu_k t} \cdot t^m$ Lösungen sind. D.h. man erhält $2\sum_{k=1}^{s} m_k$ weitere Lösungen

$$\begin{aligned} \psi_{km}(t) &= \operatorname{Re}(\varphi_{km}(t)) = \operatorname{Re} t^m e^{\mu_k t} = e^{\alpha_k t} \cdot \cos(\beta_k t) \cdot t^m \\ \tilde{\psi}_{km}(t) &= \operatorname{Im}(\varphi_{km}(t)) = \operatorname{Im} t^m e^{\mu_k t} = e^{\alpha_k t} \cdot \sin(\beta_k t) \cdot t^m \end{aligned}$$

für $k = 1, \ldots, s,\ m = 0, \ldots, m_k - 1$.

Wir haben n Lösungen gefunden und müssen nun noch zeigen, dass diese linear unabhängig sind. (Sind alle $\varphi_{j\ell}(t) = e^{\lambda_j t} \cdot t^\ell$ linear unabhängig, so auch die zugehörigen reellen Lösungen.) Nun folgt die Behauptung aus:

Lemma 134. *Seien $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und $p_1(t), \ldots, p_n(t) \in \mathbb{C}[t]$. Ist*

$$p_1(t)e^{c_1 t} + \cdots + p_n(t)e^{c_n t} = 0 \quad \textit{für alle} \quad t \in \mathbb{R},$$

so gilt $p_1 = \cdots = p_n = 0$.

Beweis. $n = 1$: Aus $p_1(t)e^{c_1 t} = 0$ folgt $p_1(t) = 0$.

Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir nehmen an, dass $\sum_{j=1}^{n+1} p_j(t)e^{c_j t} = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei k der Grad des Polynoms p_{n+1}. Dann gilt $(\frac{d}{dt} - c_{n+1})^{k+1} p_{n+1}(t)e^{c_{n+1}t} = 0$ und somit

$$0 = (\tfrac{d}{dt} - c_{n+1})^{k+1} \sum_{j=1}^{n+1} p_j(t)e^{c_j t} = \sum_{j=1}^{n} h_j(t)e^{c_j t}$$

mit gewissen Polynomen h_j.

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt aber $h_j = 0$.

Um zu zeigen, dass $p_j = 0$, schreiben wir $(t - c_{n+1})^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} a_m (t - c_j)^m$ mit $a_0 \neq 0$.

Daraus ergibt sich

$$h_j(t)e^{c_j t} = (\tfrac{d}{dt} - c_{n+1})^{k+1} p_j(t)e^{c_j t} = \sum_{m=0}^{k+1} a_m p_j^{(m)}(t)e^{c_j t}$$

und somit hat h_j denselben Grad wie p_j.

Das ist nur möglich, wenn $p_j = 0$. □

Beispiel:
Wir betrachten die DGL $x''' - x'' + x' - x = t$.

(1) Um das Fundamentalsystem der homogenen DG zu finden, suchen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$P(\lambda) \; = \; \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 \; = \; (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \; = \; (\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i).$$

Wir erhalten somit als komplexes Fundamentalsystem

$$x_1(t) = e^t, \quad \underbrace{\hat{x}_2(t) = e^{\mathrm{i}t}, \quad \hat{x}_3(t) = e^{-\mathrm{i}t}}_{\textit{komplex.}}$$

Somit ist

$$x_1 = e^t, \quad x_2(t) = \cos(t) = \mathrm{Re}(\hat{x}_2), \quad x_3(t) = \sin(t) = \mathrm{Im}(\hat{x}_2).$$

Wir haben also als allgemeine Lösung der homogenen DG

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t).$$

(2) Wir wollen auch eine spezielle Lösung der inhomogenen DG bestimmen: $b(t) = t$ ist ein Polynom ersten Grades. Daher machen wir den folgenden Ansatz

$$y_s(t) = \alpha t + \beta.$$

$\alpha - \alpha t - \beta = t$, d.h

$$-\alpha = 1 \qquad \text{und} \qquad \alpha = \beta \qquad \text{d.h.} \qquad \beta = -1$$

Somit ist die spezielle Lösung $y_s(t) = -(t+1)$, und die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist

$$x(t) = -(t+1) + c_1 e^t + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t).$$

Inhomogene lin. DG mit konst. Koeffizienten

Satz 135 (Inhomogene lin. gewöhnliche DG mit konst. Koeffizienten)**.** *Sei $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom und $\mu \in \mathbb{R}$ mit $P(\mu) \neq 0$. Dann gilt:*

(i) $\frac{e^{\mu t}}{P(\mu)}$ *ist eine Lsg. der inhomog. DGL $P(\frac{d}{dt})x = e^{\mu t}$.*

(ii) Sei $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ vom Grad m. Dann hat die inhomog. DGL $P(\frac{d}{dt})x = f(t)e^{\mu t}$ eine Lsg. der Form $g(t)e^{\mu t}$, wobei $g(t) \in \mathbb{R}[t]$ vom Grad m ist.

Beweis. (i) und der Induktionsanfang von (ii) sind offensichtlich. Für den Induktionsschritt schreiben wir $P(\frac{d}{dt})t^m e^{\mu t} =: f_0(t)e^{\mu t}$, wobei $f_0(t) \in \mathbb{R}[t]$ vom Grad m ist. Damit gibt es ein $c \neq 0$, so dass $h(t) := f(t) - cf_0(t)$ Grad $\leq m-1$ hat. Nach Ind.vor. existiert dann eine Lsg. $g_1(t)e^{\mu t}$ von $P(\frac{d}{dt})x = h(t)e^{\mu t}$ mit einem Polynom $g_1(t)$ vom Grad $\leq m-1$.

$g(t) = ct^m + g_1(t)$ ist dann das gesuchte Polynom vom Grad m. □

Satz 136. *Sei $\mu \in \mathbb{R}$ eine k-fache Nullstelle von $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ und $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ vom Grad m. Dann hat die inhomog. DG $P(\frac{d}{dt})x = f(t)e^{\mu t}$ eine Lsg. der Form $h(t)e^{\mu t}$, wobei*

$$h(t) = \sum_{j=k}^{k+m} c_j t^j.$$

Beweis. Wir schreiben $P(t) = Q(t)(t-\mu)^k$, mit einem Polynom $Q(t)$ vom Grad $m-k$ und $Q(\mu) \neq 0$.

Nach dem vorigen Satz existiert ein Polynom $g(t)$ vom Grad m, so dass $g(t)e^{\mu t}$ eine Lsg. von $Q(\frac{d}{dt})x = f(t)e^{\mu t}$ ist.

Sei $h(t) = \sum_{j=k}^{k+m} c_j t^j$ derart, dass $h^{(k)}(t) = g(t)$. Dann ist $h(t)e^{\mu t}$ die gesuchte Lsg. von $P(\frac{d}{dt})x = f(t)e^{\mu t}$.

□

Bemerkung.
Die letzten beiden Sätze gelten auch für DG'en mit komplexen Koeffizienten, d.h. $P, f, g, h \in \mathbb{C}[t]$, $\mu \in \mathbb{C}$. Die Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sind komplexwertige Funktionen der reellen Variablen t.

Beispiel: Harmonischer Oszillator
Wir betrachten die DGL

$$(*) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = a\cos\omega t, \quad \omega, \omega_0 > 0, a \in \mathbb{R}^*.$$

Diese DG beschreibt Schwingungen ohne Reibung. Man nennt Sie auch *getriebener (oder angeregter) harmonischer Oszillator* mit Eigenfrequenz ω_0. Die Anregung erfolgt hier periodisch mit Frequenz ω.

Die entsprechende harmonische Gleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ heißt *harmonischer Oszillator*. Das charakterisische Polynom $P(x) = x^2 + \omega_0^2$ hat nur die imaginären Nullstellen $\pm\omega_0 i$. Daher sind die Lsg'en der homog. Gleichung Linearkombinationen von $\sin\omega_0 t$ und $\cos\omega_0 t$.

... Harmonischer Oszillator
Um eine Lsg. von $(*)$ zu finden betrachten wir die DG

$$(**) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = ae^{i\omega t}.$$

(i) Wenn $\omega \neq \omega_0$, d.h. $P(i\omega) \neq 0$, so existiert eine Lsg. von $(**)$ von der Form $ce^{i\omega t}$. Einsetzen in $(**)$ liefert $c = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

$\varphi(t) = \operatorname{Re} ce^{i\omega t} = c\cos\omega t$ ist dann eine Lsg. von $(*)$.

(ii) Wenn $\omega = \omega_0$ (d.h. der harm. Oszillator wird mit der Eigenfrequenz ω_0 angeregt) dann gibt es eine Lsg. von $(**)$ von der Form $cte^{i\omega t}$. Einsetzen in $(**)$ liefert $c = \frac{a}{2i\omega}$.

$\varphi(t) = \operatorname{Re} cte^{i\omega t} = \frac{a}{2\omega} t \sin\omega t$ ist dann eine Lsg. von $(*)$ und für die Amplitude der Schwingung gilt $|\frac{a}{2\omega}t| \to \infty$ für $t \to \infty$ (*Resonanzkatastrophe*).